



## PRISITAIKANČIŲJŲ SANTVARŲ OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIŲ MATEMATINIAI MODELIAI JUDAMOSIOS APKROVOS ATVEJU

Juozas Atkočiūnas<sup>1</sup>, Dovilė Merkevičiūtė<sup>2</sup>, Artūras Venskus<sup>3</sup>, Juozas Nagevičius<sup>4</sup>

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva*  
*El. paštas: <sup>1</sup>juozas.atkociunas@st.vtu.lt; <sup>2</sup>dovile.merk@centras.lt;*  
*<sup>3</sup>venartas@yahoo.fr; <sup>4</sup>juozas.nagevicius@adm.vtu.lt*

*Įteikta 2007-02-22; priimta 2007-06-07*

**Santrauka.** Prisisitaikomumo teorija, nagrinėjanti tampriai plastiškas konstrukcijas, veikiama kintamosios kartotinės apkrovos, leidžia judamąją apkrovą traktuoti kaip atskirą kartotinai kintančių jėgų atvejį. Apkrovai leidžiama „judėti“ bet kuria konstrukcijos dalimi: nuo tilto vidurio, grįžti atgal, vėl į priekį – taip universaliai įvertinama apkrovimo istorija, kuri yra lemiamas faktorius, nagrinėjant plastines deformacijas patiriančios konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį. Straipsnyje atskleista galimybė taikyti prisitaikomumo teorijos metodus, sudarant teorinius santvarų optimizavimo uždavinių matematinis modelius ir juos sprendžiant. Nagrinėjama idealiai tampriai plastinė žinomos geometrijos santvara, veikiama judamosios apkrovos. Sudaryti minimalaus tūrio santvaros ar ją veikiančios apkrovos maksimizavimo uždavinių matematiniai modeliai. Modeliuose įvertinamos ne tik konstrukcijos stiprumo (prisisitaikomumo) ir standumo sąlygos, bet ir stabilumo netekimo galimybė esant plastinei santvaros darbo stadijai. Pasiūlyti nauji sprendimo algoritmai, pateikti skaitiniai strypų lankstinės santvaros, veikiamos judamosios apkrovos, optimizavimo uždavinių pavyzdžiai. Tyrimai atlikti, darant mažų poslinkių prielaidą.

**Reikšminiai žodžiai:** prisitaikomumas, optimalus projektavimas, matematinis programavimas, idealiai tampriai plastinė santvara, judamoji apkrova.

## MATHEMATICAL MODELS FOR OPTIMAL SHAKEDOWN TRUSSES DESIGN PROBLEMS IN CASE OF MOVING LOAD

Juozas Atkočiūnas<sup>1</sup>, Dalia Merkevičiūtė<sup>2</sup>, Artūras Venskus<sup>3</sup>, Juozas Nagevičius<sup>4</sup>

*Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania*  
*E-mail: <sup>1</sup>juozas.atkociunas@st.vtu.lt; <sup>2</sup>dovile.merk@centras.lt;*  
*<sup>3</sup>venartas@yahoo.fr; <sup>4</sup>juozas.nagevicius@adm.vtu.lt*

*Received 22 February 2007; accepted 7 June 2007*

**Abstract.** The shakedown theory, which analyses elastic-plastic constructions, subjected by variable repeated load, enables treating moving load as a separate type of variable repeated load. The load is allowed to „move“ at any part of the construction: from the middle of the bridge, to turn back, again move ahead – in this manner loading history is universally evaluated and it is a crucial factor, considering stress-deformation state of structures under plastic deformations. This paper reveals a possibility to apply methods of shakedown theory for creation and solution of theoretical optimization mathematical models of trusses. The perfectly elastic-plastic loaded by moving load truss is considering. The mathematical models of the minimal volume truss or it acting load maximization problems are created. There are evaluating not only strength (shakedown) and rigidity restrictions, but also stability restriction in case of plastic state of truss in models. There is proposed new solution algorithms and introduced numerical examples of truss optimization in case of moving load. The results are valid for the small displacement assumptions.

**Keywords:** shakedown, optimal design, mathematical programming, perfectly elastic-plastic truss, moving load.

## 1. Santvaros optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai

### 1.1. Problemos formulavimas

Pagrindinis statybinių konstrukcijų skaičiavimo tikslas – apskaičiuoti dėl išorinio poveikio atsirandančias įrašas bei poslinkius ir, juos žinant, suprojektuoti pakankamai stiprius, standžius ir stabilus statinius. Konstrukcijų skaičiavimo uždavinys gali būti sprendžiamas, kai žinomos statinių veikiančios apkrovos, jų geometrija ir medžiagos. Statybinės mechanikos uždavinys, kuriame visi šie trys parametrai žinomi, paprastai vadinamas *analizės uždaviniu* [1]. Taip jis vadinamas todėl, kad sprendžiant tokį uždavinį nustatomas vien konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvis, t. y. konstrukcija analizuojama mechaniniu požiūriu: lyginant su eksploataciniais reikalavimais, įsitikinama, ar konstrukcija yra pakankamai stipri, standi ar stabili [2].

Jeigu kurie nors iš išvardytų parametrų iš anksto nenustatyti, uždavinys tampa neapibrėžtas, jam išspręsti reikia papildomų sąlygų. Tenka jau ne tik analizuoti konstrukciją, bet, nustačius vienokias ar kitokias konstrukcijos parametrų ribas (nelygybėmis suformulavus stiprumo, standumo ar stabilumo sąlygas), siekti pasirinkto tikslo (ieškoti tinkamos apkrovos, tinkamos geometrijos ar tinkamos medžiagos). Taigi *optimizavimo uždavinio* tikslas – nustatyti optimalius tam tikro kriterijaus požiūriu nagrinėjamos konstrukcijos parametrus ar statinių veikiančios apkrovos pasiskirstymus [3–5].

Statybinės mechanikos optimizavimo uždaviniai yra įžanginis konstrukcijų optimalaus projektavimo etapas, pagrįstas deformuojamo kūno mechanikos lygtimis ir matematinio programavimo teorija, jos metodais bei jų mechanine interpretacija. Norint skaičiavimą pagrįsti realioms konstrukcijos darbo sąlygoms, būtina analizės ir optimizavimo uždavinių matematinuose modeliuose kuo tiksliau įvertinti konstrukcijos medžiagos savybes ir išorinius poveikius. Iš dalies tai pasiekama, apimant plastines medžiagos savybes, kuriomis pasižymi nemaža statybinių konstrukcijų, ypač metalinių [6–8].

Konstrukcijų skaičiavimas ir projektavimas, įvertinant plastines deformacijas, leidžia efektyviau išnaudoti jų laikomąją galią ir sudaryti ekonomišknesnius projektus [9]. Kita vertus, realūs konstrukcijos poveikiai dažniausiai yra cikliški. Kintamai kartotinė apkrova (KKA) – tai sistema jėgų, kurių kiekviena ar jų grupės gali kisti nepriklausomai viena nuo kitos. Tolesniuose svarstymuose KKA laikoma kvazistatine. Labai dažnai KKA nusakoma ne konkrečia apkrovimo istorija (kitimo laike dėsnis  $F(t)$ ), o tik viršutinėmis  $F_{sup}$  ir apatinėmis  $F_{inf}$  savo kitimo ribomis [10]:  $F_{inf} \leq F(t) \leq F_{sup}$ .

Judamoji apkrova gali būti interpretuota kaip atskiras KKA atvejis [11]. Todėl santvaroms, veikiamoms judamosios apkrovos, optimizuoti galima taikyti tampriai plastinių prisitaikančiųjų konstrukcijų teorijos principus. Mini-

malaus santvaros tūrio projektas, gautas neatsižvelgus į standumo ir stabilumo apribojimus, dažniausiai neatitinka statybinėms konstrukcijoms keliamų eksploatacinių reikalavimų. Darbe santvaros strypų stabilumo apribojimui siejami su „Eurokodo 3“ rekomendacijomis, kai leistinosios ribinės gniuždomų strypų įrašos gaunamos sumažinus tokių strypų takumo įtempius [6, 12, 13].

Straipsnyje sudarytų minimalaus tūrio santvarų ar optimalios apkrovos radimo uždavinio matematinį modelių tiesioginei realizacijai sukurti nauji algoritmai [14], leidžiantys metalinių santvarų skerspjuviams optimizuoti taikyti šiuolaikines kompiuterines technologijas. Tai iš dalies leidžia sugretinti realaus santvarų projektavimo ir gamybos rezultatus su teorinių paieškų bandomaisiais rezultatais [15].

### 1.2. Minimalaus tūrio santvaros uždavinys

Nagrinėjamas prisitaikiusios idealiai tampriai platinės santvaros būvis. Santvaros geometrija (strypų ilgiai  $L_j$ ,  $j=1,2, \dots, n$ ,  $j \in J$ ), medžiagos takumo riba  $\sigma_{yj}$ , tamprumo modulis  $E_j$ , apkrova duoti. Kintamos kartotinės apkrovos vektorius  $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_m(t))^T$  komponentai yra laike  $t$  kintančios jėgos, kurių pridėjimo vieta žinoma. Kiekviena jėga  $F_i$  charakterizuojama nepriklausančiomis nuo laiko  $t$  viršutinėmis ir apatinėmis kitimo ribomis  $F_{i,sup}$ ,  $F_{i,inf}$ ,  $i=1,2, \dots, m$  ( $i \in I$ ).

Minimalaus svorio santvaros projektas randamas sprendžiant uždavinį [16]:

rasti

$$\min \sum_j L_j A_j, \quad (1a)$$

kai

$$f_{\max} = N_0 - [G] \Theta_p - N_{e,\max} \geq 0, \quad (1b)$$

$$f_{\min} = N_{0,cr} + [G] \Theta_p + N_{e,\min} \geq 0, \quad (1c)$$

$$N_0 = (N_{0j})^T, \quad N_{0,cr} = (N_{0j,cr})^T,$$

$$N_{0,j} = \sigma_{yj} A_j, \quad N_{0,j,cr} = \phi_j \sigma_{yj} A_j, \quad (1d)$$

$$A_j \geq A_{j,\min}, \quad j \in J, \quad (1e)$$

$$\Theta_p = \lambda_{\max} - \lambda_{cr}, \quad (1f)$$

$$\lambda_{\max}^T f_{\max} = 0, \quad \lambda_{cr}^T f_{\min} = 0, \quad (1g)$$

$$\lambda_{\max} \geq 0, \quad \lambda_{cr} \geq 0, \quad (1h)$$

$$u_{r,\min} \leq \min [H] \Theta_p,$$

$$\max [H] \Theta_p \leq u_{r,\max}. \quad (1i)$$

Apkrovos kitimo ribų vektoriai  $F_{inf}$  ir  $F_{sup}$  žinomos, todėl ekstreminių jėgų vektoriai  $N_{e,\max}$  ir  $N_{e,\min}$ , esantys tiesinėse takumo sąlygose  $f_{\max}$  (1b) ir  $f_{\min}$  (1c), matematiniam modelyje (1a–1i) yra žinomi (jų skaičiavimas detalčiau paaiškintas antrame skyriuje). Tikslo funkcija (1a) formuojama pasitelkus strypų ilgius  $L_j$  ir skerspjuvių

plotus  $A_j$  ( $j \in J$ ). Į standumo sąlygas (1i) nesudėtinga įtraukti ir tampraus santvaros skaičiavimo poslinkius, naudojant poslinkių influentinę matricą  $[\beta] = ([A][D]^{-1}[A]^T)^{-1}$ , apkrovų ribų vektorius  $F_{inf}$  ir  $F_{sup}$ , čia  $[A]$  yra statikos lygčių koeficientų matrica, o  $[D]$  – santvaros pasidavimo matrica.

Gniuždomų santvaros strypų galimas stabilumo netekimas įvertinamas takumo sąlygose (1c) ėmus naudoti redukuotą ribinių ašinių jėgų vektorių  $N_{0,cr}$ . Vektoriaus  $N_{0,cr}$  komponentai  $N_{0,j,cr}$  visiems  $j \in J$  skaičiuojami, vadovaujantis „Euronormų 3“ (EN3) rekomendacijomis [12]:

$$N_{0,j,cr} = \varphi_j N_{0,j}, \text{ čia } \varphi_j = \frac{1}{\Phi_j + [\Phi_j^2 - \bar{\lambda}_j^2]^{0,5}}, \text{ kai}$$

$$\Phi_j = 0,5 \left( 1 + a(\bar{\lambda}_j - 0,2) - \bar{\lambda}_j^2 \right), \quad \bar{\lambda}_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_{1j}} \sqrt{\beta_A} =$$

$\frac{\lambda_j}{\pi [E_j / \sigma_{y,j}]^{0,5}} \sqrt{\beta_A}$ ,  $j \in J$ , čia  $E_j$  yra  $j$ -ojo strypo tamprumo modulis;  $\lambda_j = L_j / i_j$  – strypo liaunis,  $i_j$  – santvaros  $j$ -ojo strypo inercijos spindulys. Vien tik gniuždomų strypų atveju koeficientas  $\beta_A = 1$ , koeficientas  $a$ , įvertinantis strypų netobulumą, priklauso nuo skerspjuvio formos bei medžiagos savybių. Strypinės sistemos galimas stabilumo netekimas neįvertinamas, kai  $N_{0,cr} = N_0$ .

Netiesinio matematinio programavimo uždavinyje (1a)–(1i) nežinomaisiais yra santvaros elementų skerspjuvių plotai  $A_j$ ,  $j \in J$  ir plastinių daugiklių vektoriai  $\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{cr}$ , kurie formuoja plastinių deformacijų vektorius  $\Theta_p = \lambda_{max} - \lambda_{cr}$ . Takumo sąlygose (1b) ir (1c) esanti sandauga  $[G]\Theta_p$  išreiškia liekamasias įrašas, čia  $[G]$  – liekamųjų įrašų influentinė matrica. Konstrukciniuose apribojimuose (1e)  $A_j \geq A_{j,min}$  naudojamos minimaliosios skerspjuvių plotų reikšmės  $A_{j,min}$ . Formulės (1g), (1h) išreiškia matematinio programavimo griežtumo sąlygas. Konstrukcijos standumo apribojimai (1i) realizuojami, ribojant mazgų poslinkius ( $u_{r,min}$ ,  $u_{r,max}$  – duotieji liekamųjų poslinkių  $u_r = [H]\Theta_p$  komponentų kitimo apatinių ir viršutinių ribų vektoriai, kur  $[H]$  – liekamųjų poslinkių influentinė matrica). Būtent standumo sąlygos (1i), reikalaujančios papildomai spręsti tiesinį programavimo uždavinį [17], rodo, kad pagrindinis netiesinis santvaros optimizavimo uždavinys nėra klasikinis matematinio programavimo uždavinys. Todėl jis turi būti sprendžiamas etapais, apie sprendimo algoritmą bus kalbama trečiame skyriuje.

Tikslo funkcijos (1a) minimali reikšmė randama, neatšizvelgiant į galimą strypų stabilumo netekimą, jeigu matematinio modelio (1a)–(1i) takumo sąlygose (1c) takumo įtempimų mažinimo koeficientas  $\varphi_j = 1$   $j \in J$ .

### 1.3. Santvaros apkrovos optimizavimo uždavinys

Apkrovos kitimo ribų  $F_{sup}$ ,  $F_{inf}$  nustatymo (patikrinamasis) uždavinys, formuluojamas taip: *ieškomos pritaikomumo būvio apkrovos kitimo ribos  $F_{sup}$ ,  $F_{inf}$ , atitinkančios nustatytą optimalumo kriterijų*  $\max \{T_{sup}^T F_{sup} - T_{inf}^T F_{inf}\}$  *bei konstrukcijos stiprumo, standumo ir stabilumo reikalavimus, čia  $T_{sup}$ ,  $T_{inf}$  – optimalumo kriterijaus svorio koeficientų vektoriai.*

Santvaros apkrovos optimizavimo pritaikomumo sąlygomis uždavinys užrašomas taip:  
rasti

$$\max \{T_{sup}^T F_{sup} - T_{inf}^T F_{inf}\}, \quad (2a)$$

kai

$$f_{max} = N_0 - [G]\Theta_p - N_{e,max} \geq 0, \quad (2b)$$

$$f_{min} = N_{0,cr} + [G]\Theta_p + N_{e,min} \geq 0, \quad (2c)$$

$$N_0 = (N_{0j})^T, \quad N_{0,cr} = (N_{0j,cr})^T, \quad (2d)$$

$$N_{0,j} = \sigma_{yj} A_j, \quad N_{0,j,cr} = \varphi_j \sigma_{yj} A_j, \quad (2d)$$

$$F_{sup} \geq 0, \quad -F_{inf} \geq 0, \quad (2e)$$

$$\Theta_p = \lambda_{max} - \lambda_{cr}, \quad (2f)$$

$$\lambda_{max}^T f_{max} = 0, \quad \lambda_{cr}^T f_{min} = 0, \quad (2g)$$

$$\lambda_{max} \geq 0, \quad \lambda_{cr} \geq 0, \quad (2h)$$

$$u_{r,min} \leq \min [H]\Theta_p, \quad \max [H]\Theta_p \leq u_{r,max}. \quad (2i)$$

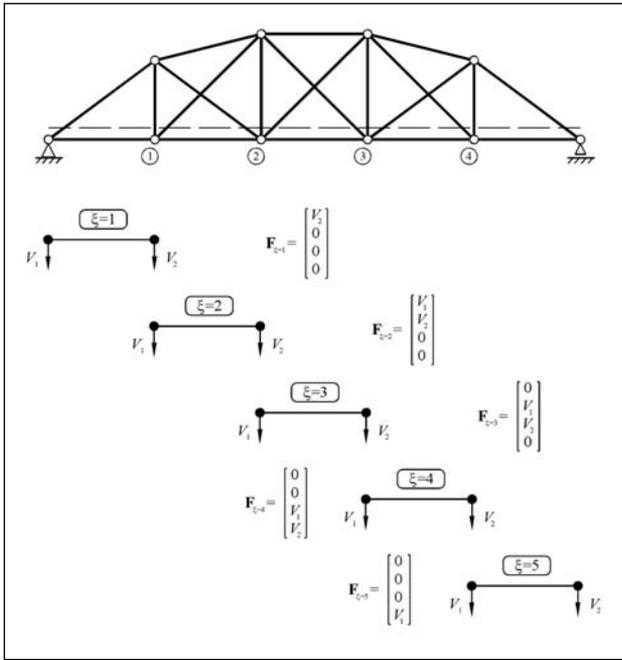
Ribinių ašinių jėgų vektoriai  $N_0$ ,  $N_{0,cr}$  ir liekamųjų poslinkių ribos  $u_{r,min}$ ,  $u_{r,max}$  yra žinomi dydžiai uždavinyje (2a)–(2i). Uždavinio (2a)–(2i) optimalus sprendinys yra vektoriai  $F_{sup}^*$ ,  $F_{inf}^*$  ir  $\lambda_{max}^*$ ,  $\lambda_{cr}^*$ .

## 2. Ekstreminių ašinių jėgų vektorių $N_{e,max}$ ir $N_{e,min}$ sudarymas

Vektoriams  $N_{e,max}$  ir  $N_{e,min}$  skaičiuoti reikalinga ašinių jėgų influentinė matrica  $[\alpha]$ . Šių vektorių sudarymas aptariamas 1 pav.

Dviejų jėgų sistema  $V_1$  ir  $V_2$  juda apatine santvaros juosta ir gali užimti keturias padėtis ties mazgais 1, 2, 3 ir 4. Bendruoju atveju padėčių gali būti  $\xi = 1, 2, \dots, p$  ( $\xi \in P$ ) ir kiekviena padėtis charakterizuojama savo apkrovos vektoriumi  $F_\xi$  (čia pravartu prisiminti formulę  $N_{e,\xi} = [\alpha]F_\xi$ ). Ateityje paprastumo dėlei naudojamas ne pilnutinis apkrovos vektorius  $F$  (tiksliau kalbant, vektorius  $F_\xi$ ), o jo pavektorius  $\hat{F}_\xi$ , susietas tik su santvaros važiuojamąja dalimi. Pavyzdžiui, nagrinėjamai santvarai sudaromi penki apkrovos vektoriai (kiekvienai apatine santvaros juosta jėgų sistemos  $V_1$  ir  $V_2$  padėčiai):

$$\hat{F}_1 = (V_2, 0, 0, 0)^T, \quad \hat{F}_2 = (V_1, V_2, 0, 0)^T,$$



1 pav. Judamoji apkrova užrašyta vektoriais  $F_{\xi}$

Fig 1. Moving load realized by vectors  $F_{\xi}$

$$\hat{F}_3 = (0, V_1, V_2, 0)^T, \quad \hat{F}_4 = (0, 0, V_1, V_2)^T, \\ \hat{F}_5 = (0, 0, 0, V_1)^T. \text{ Dabar pagal formulę}$$

$$N_{e,\xi} = [\hat{\alpha}] \hat{F}_{\xi} \quad (3)$$

skaičiuojamos pseudotamprios įrašos kiekvienai judamosios jėgų sistemos padėčiai  $\xi \in P$  (matrica  $[\hat{\alpha}]$  yra influentinės matricos  $[\alpha]$  pamatricė, abiejų matricių eilučių skaičius vienodas). Kiekvienas vektorių  $N_{e,\max} = (N_{e1,\max}, N_{e2,\max}, \dots, N_{en,\max})^T$  ir  $N_{e,\min} = (N_{e1,\min}, N_{e2,\min}, \dots, N_{en,\min})^T$  komponentas skaičiuojamas pagal formules:

$$N_{ej,\max} = \max_{\xi} N_{ej,\xi}, \quad N_{ej,\min} = \min_{\xi} N_{ej,\xi} \\ \text{visiems } \xi \in P \text{ ir } j \in J. \quad (4)$$

Taigi, santvaros uždavinių (1a)–(1i), (2a)–(2i) takumo sąlygose (1b)–(1c), (2b)–(2c) įrašytos visos tampraus skaičiavimo išraiškos nuo visų judamosios apkrovos padėčių  $\xi \in P$ . Esant nesimetrinei santvarai, ekstreminių jėgų vektoriams  $N_{e,\max}$  ir  $N_{e,\min}$  rasti reikia papildomai sudaryti dar penkis vektorius  $F_{\xi}$ , kai jėgos  $V_1$  ir  $V_2$  sukeistos vietomis t. y.:

$$\hat{F}_6 = (V_1, 0, 0, 0)^T, \\ \hat{F}_7 = (V_2, V_1, 0, 0)^T, \quad \hat{F}_8 = (0, V_2, V_1, 0)^T,$$

$\hat{F}_9 = (0, 0, V_2, V_1)^T$ ,  $\hat{F}_{10} = (0, 0, 0, V_2)^T$ . Santvaros tūrio minimizavimo uždavinio (1a)–(1i) sprendimo metu  $N_{e,\max}$  ir  $N_{e,\min}$  kinta, nes priklauso nuo santvaros fizikinių ir geometrinių parametru. Patikrinamajame uždavinyje (2a)–(2i)  $N_{e,\max}$  ir  $N_{e,\min}$  priklauso tik nuo apkrovos kitimo ribų ( $\alpha$  šiuo atveju nesikeičia).

### 3. Naujas prisitaikančiųjų santvarų optimizavimo uždavinių sprendimo algoritmas

#### 3.1. Moro integralo interpretacija plastinių konstrukcijų analizėje

Pagrindinio netiesinio santvaros minimalaus tūrio uždavinio (1a)–(1i) tiesioginis sprendimas yra gana sudėtingas, nes sprendimo metu keičiasi santvaros strypų standžiai  $EA_j$ ,  $j \in J$  (visos santvaros tamprumo modulis laikomas pastoviu). Tai reiškia, kad keičiasi influentinės  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$ ,  $[G]$  ir  $[H]$  matricos. Nemažus sprendimo sunkumus savo ruožtu sukelia ir matematinio programavimo griežtumo sąlygos (1g) ir standumo sąlygų (1i) (arba (2g)–(2i)) tikrinimas. Standumo sąlygos įvedamos dėl to, kad KKA atveju įmanomas skerspjūvių, esančių plastinės stadijos, nusikrovimas. Jeigu nenagrinėjama apkrovimo istorija, tai uždavinio (1a)–(1i) „viduje“ tenka spręsti tiesinius uždavinius, nustatant:  $u_{r,\inf} = \min [H] \Theta_p$ ,  $u_{r,\sup} = \max [H] \Theta_p$ . Jeigu pradiniais sprendimo etapais nusikrovimas ignoruojamas, sąlyga (1i) (arba (2i)) užrašoma taip:

$$u_{r,\min} \leq [H] \Theta_p \leq u_{r,\max}. \quad (5)$$

Sąlyga (2c) iš esmės išreiškia Moro integralą tampriai plastinei sistemai. Tegul ribojamas  $i$ -tasis liekamasis poslinkis  $u_{r,i}$ :

$$u_{r,i} = \sum_l \int \frac{N_r^* \bar{N}_{er,i}}{EA} = N_r^{*T} [D] \bar{N}_{er}, \quad i \in I, \quad (6)$$

čia  $N_r^*$  – analizės uždavinio, kuris figūruoja uždaviniuose (1a)–(1i), (2a)–(2i) optimalus sprendinys,  $\bar{N}_{er}$  – santvaros strypų ašinės jėgos nuo vienetinės jėgos  $\bar{F}_i = 1,0$  ( $\bar{N}_{er}$  skaičiuojama santvaroje, atsižvelgus į jos statiško neišsprendžiamumo laipsnio sumažėjimą, vystantis plastinėms deformacijoms).

#### 3.2. Etapinis minimalaus tūrio santvaros uždavinio sprendimo algoritmas

Aptartos standumo sąlygos (5), (6) pagrindiniame optimizavimo uždavinyje (1a)–(1i) pakeičiamas trijų tarpinių uždavinių sprendimu.

*Pirmasis tarpinis uždavinys.* Pasirinkus santvaros strypų

skerspjūvius  $A_j$ ,  $j \in J$ , formuojamos matricos  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$ ,  $[G]$  ir  $[H]$ . Kadangi žinomas jėgų sistemos dydis ir jos pridėjimo padėtys, pagal formules (4) apskaičiuojami  $\mathbf{N}_{e,\max} = (\mathbf{N}_{e1,\max}, \mathbf{N}_{e2,\max}, \dots, \mathbf{N}_{en,\max})^T$  ir  $\mathbf{N}_{e,\min} = (\mathbf{N}_{e1,\min}, \mathbf{N}_{e2,\min}, \dots, \mathbf{N}_{en,\min})^T$  komponentai.

*Antrasis tarpinis uždavinys.* Analizės uždavinio sprendimas:  
rasti

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{N}_r^T [D] \mathbf{N}_r, \quad (7a)$$

kai

$$\mathbf{f}_{\max} = \mathbf{N}_0 - [G] \Theta_p - \mathbf{N}_{e,\max} \geq \mathbf{0}, \quad (7b)$$

$$\mathbf{f}_{\min} = \mathbf{N}_{0,cr} + [G] \Theta_p + \mathbf{N}_{e,\min} \geq \mathbf{0}, \quad (7c)$$

Sprendžiant šį uždavinį naudojamosi pirmojo tarpinio uždavinio sprendimo rezultatais, būtent vektoriais  $\mathbf{N}_{e,\max}$  ir  $\mathbf{N}_{e,\min}$ . Antrojo tarpinio uždavinio sprendimo rezultatai yra  $\mathbf{N}_r^*$ ,  $\mathbf{u}_r^*$ ,  $\Theta_p^*$ . Gavus  $\mathbf{u}_r^*$ , iš dalies galima patikrinti (5) sąlygą. Nė viena iš tų sąlygų neturėtų būti pažeista. Priešingu atveju didinami santvaros strypų skerspjūvio plotai  $A_j$ ,  $j \in J$  ir grįžtama prie pirmojo tarpinio uždavinio.

Turint antrojo tarpinio uždavinio sprendinį  $\mathbf{N}_r^*$  ir žinant  $\mathbf{N}_{e,\max}$  ir  $\mathbf{N}_{e,\min}$  skaičiuojami suminiai  $\mathbf{N}_{\max} = \mathbf{N}_r^* + \mathbf{N}_{e,\max}$ ,  $\mathbf{N}_{\min} = \mathbf{N}_r^* + \mathbf{N}_{e,\min}$  ir sudaromas vektorius. Šie vektoriai –  $\mathbf{N}_r^*$ ,  $\mathbf{N}_{e,\max}$ ,  $\mathbf{N}_{e,\min}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_{er}$  yra pradiniai duomenys trečiajam tarpiniam uždaviniui spręsti.

*Trečiasis tarpinis uždavinys.* Šio uždavinio matematinis modelis toks:  
rasti

$$\min \sum_j L_j A_j, \quad (8a)$$

kai

$$\sigma_y A_j \geq (N_{rj}^* + N_{ej,\max}),$$

$$\varphi_j \sigma_y A_j \geq (N_{rj}^* + N_{ej,\min}), \quad (8b)$$

$$u_{ri,\min} \leq \sum_l \int \frac{N_r^* \bar{N}_{er,i}}{EA} \leq u_{ri,\max}, \quad (8c)$$

$$u_{ri,\min} \leq \sum_l \int \frac{N_r^* \bar{N}_{er,i}}{EA} \leq u_{ri,\max}. \quad (8d)$$

Šiame uždavinyje nežinomieji yra strypų skerspjūvio plotai  $A_j$ ,  $j \in J$ . Tai išskilojo programavimo uždavinys.

### 3.3. Liekamųjų poslinkių analitinės išraiškos

Šis algoritmas panašus į aprašytąjį 4.2 skyriuje. Skiriasi tik standumo apribojimų (3) išraiška, kuri užrašoma taip:

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq [H] \Theta_p \leq \mathbf{u}_{r,\max}, \quad (9)$$

čia matricos  $[H]$  komponentai yra analitinės išraiškos, gautos panaudojus kompiuterinės algebros paketą MAPLE. Analitinės išraiškos leidžia lengvai suskaičiuoti ir apribojimų (9) gradientus, kurie reikalingi sprendžiant uždavinį (1a)–(1i) Rozeno projektuojamųjų gradientų metodu [18]. Sprendimo etapai analogiški 4.2 skyriaus optimizavimo uždaviniui. Tačiau trečiasis tarpinis uždavinys užrašomas taip: rasti

$$\min \sum_j L_j A_j, \quad (10a)$$

kai

$$\sigma_y A_j \geq (N_r^* + N_{e,\max}),$$

$$\varphi_j \sigma_y A_j \geq (N_r^* + N_{e,\min}), \quad (10b)$$

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq [H] \Theta_p \leq \mathbf{u}_{r,\max}, \quad (10c)$$

$$A_j \geq A_{j,\min}. \quad (10d)$$

Reikėtų pažymėti, jog analitinių matricos  $[H]$  bei apribojimų (10c) išraiškų formavimas yra imlus kompiuterio resursų procesas.

## 4. Pavyzdžiai

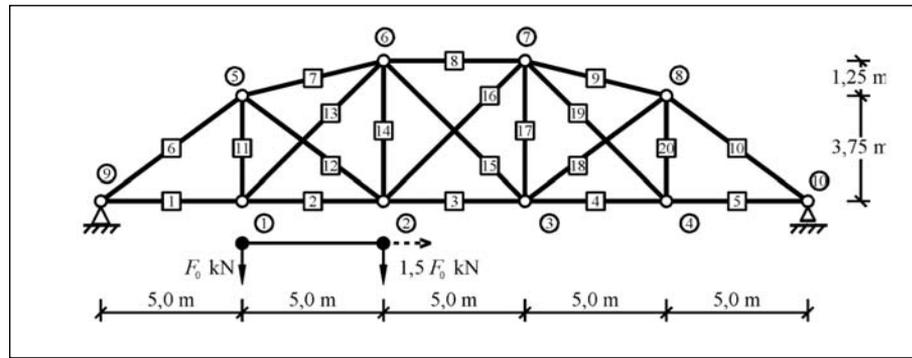
*4.1 pavyzdys.* Nagrinėjama tiltinė santvara (2 pav.) apkrauta dviejų judančiųjų jėgų sistemos:  $0 \leq F_1 \leq F_{1,sup} = 370$  kN ir  $0 \leq F_2 \leq F_{2,sup} = 555$  kN.

Santvara sudaryta iš 20 strypų, jos laisvės laipsnis 17. Tamprumo modulis  $E = 21\,000$  kN/cm<sup>2</sup>, visų strypų takumo riba  $\sigma_y = 20$  kN/cm<sup>2</sup>. Santvaros strypai grupuojami į keturias grupes (viršutinės juostos, apatinės juostos, vertikalūs, įstriži), kur kiekvienos grupės strypų skerspjūvio plotai yra lygūs. Parinkti minimalūs skerspjūvių plotai yra:

$$A_{bot,\min} = A_{top,\min} = A_{diag,\min} = A_{vert,\min} = 10 \text{ cm}^2.$$

Pagrindinė užduotis – išspręsti tūrio minimizacijos uždavinį (1a)–(1i) t. y. rasti skerspjūvio plotus  $A_k$ ,

$k = 1, 2, \dots, 20$  atitinkančius kriterijų (1a)  $\min \sum_j L_j A_j$ , šiais atvejais:



2 pav. Santvaros geometrija bei apkrova

Fig 2. Geometry and load of the truss

A1, kai įvertintos stiprumo (1b)–(1c) ir standumo (1i) sąlygos;

A2, kai įvertintos visos – stiprumo, standumo ir stabilumo – sąlygos

Standumo apribojimai realizuojami naudojant vertikalųjų mazgų poslinkių suvaržymus  $|u_i| \leq 3$  cm.

Tūrio minimizacijos uždavinys (1a–1i) sprendžiamas iteracijomis (sprendimo metu kinta  $N_{e,max}$  ir  $N_{e,min}$ , nes kinta santvaros fizikiniai ir geometriniai parametrai). A1 atveju gautas minimalus santvaros tūris  $V_{min} = 471\,710$  cm<sup>3</sup>, o A2 –  $V_{min} = 569\,100$  cm<sup>3</sup>.

4.2 pavyzdys. Nagrinėjama dvidešimties strypų (jų skerspjūvis žiedinės formos) santvara (2 pav.), veikiamą judamosios apkrovos (dviejų jėgų sistemos, kurių pirmoji –  $1,5 F_0$ , antroji –  $F_0$ ). Santvaros strypų medžiagos tamprumo modulis  $E = 21\,000$  kN/cm<sup>2</sup> ir takumo riba  $\sigma_y = 20$  kN/cm<sup>2</sup>. Strypų skerspjūvio plotai  $A_k$  bei klumpumo koeficientai  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 20$  yra tokie:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_{12} = A_{13} = A_{15} = A_{16} = A_{18} = 48,25 \text{ cm}^2, \quad A_6 = A_{10} = 72,26 \text{ cm}^2, \quad A_7 = A_8 =$$

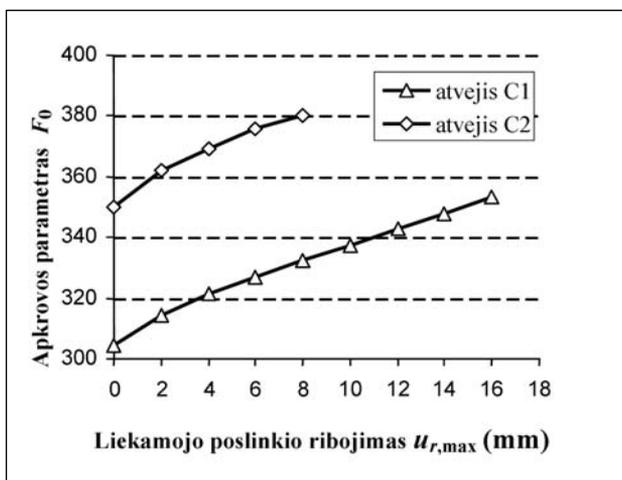
$$A_9 = 46,84 \text{ cm}^2, \quad A_{11} = A_{14} = A_{17} = A_{20} = 43,23 \text{ cm}^2, \\ A_{19} = 48,25 \text{ cm}^2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0,837, \\ \varphi_6 = \varphi_{10} = 0,821, \quad \varphi_7 = \varphi_9 = 0,860, \quad \varphi_8 = 0,869, \\ \varphi_{11} = \varphi_{20} = 0,889, \quad \varphi_{12} = \varphi_{18} = 0,731, \quad \varphi_{\varphi_3} = \varphi_{15} = \\ \varphi_{16} = \varphi_{19} = 0,650, \quad \varphi_{14} = \varphi_{17} = 0,792.$$

Pagrindinė užduotis – rasti judamosios apkrovos maksimalią parametro  $F_0$  reikšmę:

C1 – kai atsižvelgiama tik į stiprumo (2b)–(2c) ir standumo (2i) reikalavimus;

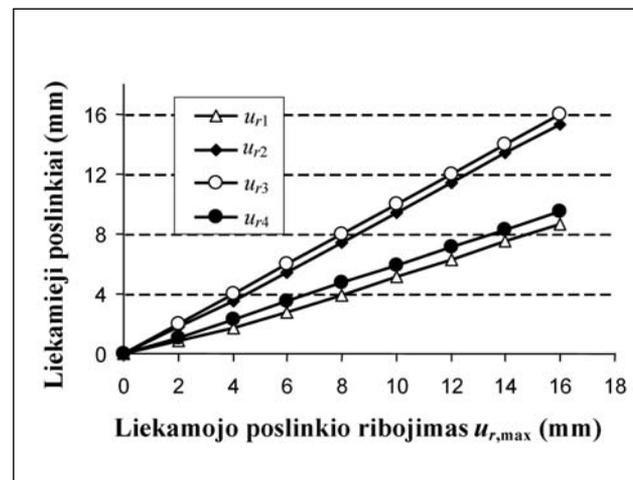
C2 – kai visos – tiek stiprumo, tiek standumo, tiek stabilumo – sąlygos įvertinamos.

Standumo sąlygos realizuojamos ribojant santvaros apatinės juostos mazgų vertikaluosius poslinkius, įvedant skirtingas  $u_{r,max}$  reikšmes ( $0 \leq u_{r,i} \leq u_{r,max}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ). Pritaikomumo būvio apkrovos daugiklio  $F_0$  kitimas, esant skirtingiems  $u_{r,max}$ , parodytas 3 pav. Santvaros apatinės juostos vertikalųjų mazginių poslinkių reikšmės (C2 atveju) parodytos 4 pav. (indeksas ties  $u_r$  atitinka mazgo numerį).



3 pav.  $F_0$  priklausomybė nuo  $u_{r,max}$

Fig 3.  $F_0$  dependence on  $u_{r,max}$



4 pav.  $u_r$  priklausomybė nuo  $u_{r,max}$

Fig 4.  $u_r$  dependence on  $u_{r,max}$

## 5. Išvados

Idealiai tampriai plastinei santvarai, veikiamai judamosios apkrovos, optimizuoti įmanoma pasitelkti prisitaikymo teorijos metodus. Jungiamąja grandimi čia yra tamprių ekstreminių ašinių jėgų skaičiavimas pagal visas apkrovų hodografo viršūnes. Apkrovos gali būti charakterizuojamos ir viršutinėmis nuo laiko nepriklausančiomis jėgų kitimo ribomis (apkrovų judėjimo tvarka tampa neaktuali). Sudarytieji nauji netiesiniai apkrovos optimizavimo ar minimalaus tūrio santvaros uždavinių matematiniai modeliai tuomet „dirba“ į atsargos pusę (negalima pasiekti realios konstrukcijos cikliškai-plastinio suirimo būvio). Skaitiniai straipsnio eksperimentai parodė ne tik siūlomų naujų sprendimo algoritmų efektyvumą, bet ir pačių optimizavimo uždavinių matematinų modelių sudarymo pagrįstumą.

## Literatūra

1. ČYRAS, A. *Analysis and Optimization of Elastoplastic Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1983. 112 p.
2. BAZANT, Z. *Inelastic Analysis of Structures in Civil Engineering*. John Wiley & Sons, New York, 1999.
3. ROZVANY, G. I. N. *Optimal design of flexural systems*. Oxford: Pergamon Press, 1976.
4. BORKOWSKI, A.; JENDO, S.; REITMAN. *Mathematical Programming*, Vol 2 of the series „Structural Optimization“. Ed. by Save, M. and Prager, W. Plenum Press, New York, 1990.
5. GIAMBANCO, F.; PALIZZOLO, L.; POLIZZOTTO, C. Optimal shakedown design of beam structures. *Structural Optimization*, 1994, Vol 8, p. 156–167.
6. KALISZKY, S.; LÓGÓ, J. Plastic behaviour and stability constraints in shakedown analysis and optimal design. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2002, 24, p. 118–124.
7. CASCIARO, R.; GARCEA, G. An iterative method for shakedown analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 191, 2002, p. 5761–5792.
8. SMITH, D. LLOYD. *CISM, Mathematical programming methods in structural plasticity*. Wien-New York: Springer-Verlag, 1990.
9. CHOI, S. H.; KIM, S. E. Optimal design of steel frame using practical nonlinear inelastic analysis. *Engineering Structures*, 2002, Vol 24 (9), p. 1189–1201.
10. ATKOČIŪNAS, J.; MERKEVIČIŪTĖ, D. Optimal Shakedown Design of Bar Systems: Strength, Stiffness and Stability Constraints. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology*, September 7–9, 2004, Lisbon, Portugal (Eds. B. H. V. Topping and C. A. Mota Soares). Civil-Comp Press, Stirling, Scotland, 2004, p. 361–363. ISBN 0-948749-93-8.
11. DAPŠEVIČIŪTĖ, I.; ATKOČIŪNAS, J. Pritaikančių santvarų optimizacija: judamosios apkrovos atvejis. Iš *7-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities“*, įvykusios Vilniuje 2004 m. kovo 25–26 d., medžiaga. *Statyba*. Vilnius: Technika, 2004, p. 277–282. ISBN 9986-05-893-7.
12. CEN, EN 1993-1-1, Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, 4th Draft, Brussels, October 2001.
13. FERRIS, M. C.; TIN-LOI, F. On the solution of a minimum weight elastoplastic problem involving displacement and complementarity constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 174, p. 107–120.
14. VENSKUS, A.; ATKOČIŪNAS, J. Patobulintas prisitaikančių sistemų optimizacijos uždavinių sprendimo algoritmas. Iš *STATYBA. 9-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“*, įvykusios Vilniuje 2006 m. kovo 29–31 d., pranešimų rinkinys. Vilnius: Technika, 2006, p. 265–270. ISBN 9955-28-047-6.
15. Staat, M.; Heitzer, M. (eds.). *Numerical methods for limit and shakedown analysis. Series of John von Neumann Institute for Computing*, Vol 15, 2003.
16. MERKEVIČIŪTĖ, D.; ATKOČIŪNAS, J. Minimum volume of trusses at shakedown – mathematical models and new solution algorithms. *Mechanika*, 2005, Nr. 2(52), p. 47–54. ISSN 1392-1207.
17. ATKOČIŪNAS, J. Mathematical models of optimization problems at shakedown. *Mech. Res. Commun.*, 1999, Vol 26, No 3, p. 319–326.
18. BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Non-linear programming: theory and algorithms*. New York: Brijbasi Art Press Ltd., John Wiley & Sons, Inc., 2004. 638 p.

**Juozas ATKOČIŪNAS.** Professor, Dr Habil (technical sciences, mechanical engineering). Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University.

Author and coauthor of 2 manuals and monography, 6 textbooks, 94 scientific articles. Participant of intern conferences. Scientific interests: structural and computational mechanics, applied mathematical programming, optimal shakedown design of elastic-plastic structures. Lithuanian State Science Prize Laureate (1993).

**Dovilė MERKEVIČIŪTĖ.** Doctor. Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University.

Author and coauthor of 14 scientific articles. Participant of intern conferences. Scientific interests: Optimization of geometrically non-linear elastic-plastic structures at shakedown.

**Artūras VENSKUS.** PhD Student. Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University.

Coauthor of 2 scientific articles. Participant of conferences. Research interests: optimal shakedown design of elastic-plastic structures.

**Juozas NAGEVIČIUS.** Associate Professor, PhD. Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University.

Author and coauthor of 2 manuals and over 40 scientific articles. Participant of intern conferences. Research interests: elastic-plastic analysis and optimization of structures, numerical methods in structural mechanics. Lithuanian State Science Prize Laureate (1993).