О ПРОИЗВОДНОЙ РЯДА ДИРИХЛЕ

М. Н. ШЕРЕМЕТА, С. И. ФЕДЫНЯК

Львовский университет
Кафедра теории функций и теории вероятностей
290602 г. Львов, Университетская 1, Украина

Для аналитической в круге $\{z: |z|<R\}$, $0<R\le\infty$, функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

пусть

$$M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\} \text{ и } K_1(r)=rM_{f'}(r)/M_f(r).$$

Т. Ковари [1] доказал, что если $f(z)$ –целая ($R=+\infty$) функция порядка $\rho\in(0,+\infty)$ и типа $T\in(0,+\infty)$, то имеют место неулучшаемые оценки

$$1\le\varlimsup_{r\to\infty}\frac{K_1(r)}{T\rho r^{\rho}}\le e.$$

Через $\Omega(A)$, $-\infty<A\le+\infty$, обозначим класс положительных неограниченных на $(-\infty,A)$, функций Φ таких, что производная Φ' непрерывна, положительная и возрастает к $+\infty$ на $(-\infty,A)$. Заметим, что если $\Phi\in\Omega(A)$, то $\Phi(x)\to C\ge 0$ и $\Phi'(x)\to 0$ при $x\to-\infty$. Поэтому обратная к Φ' функция φ непрерывна на $(0,+\infty)$ и возрастает к A. Пусть $\Phi\in\Omega(A)$ и $\psi(x)=x-\Phi(x)/\Phi'(x)$ –функция, асоциированная с Φ по Ньютону. Нетрудно показать, что $\Psi(x)\uparrow A(x\to A)$ и обратная к Ψ функция Ψ^{-1} возрастает к A на $(-\infty,A)$. Поэтому функция $\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$ возрастает к $+\infty$ на $(-\infty,A)$.

Теорема Т. Ковари обобщена в [2], где показано, что если $\Phi\in\Omega(+\infty)$ и f –целая функция такая, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\Phi(\ln r)}=1,$$

то

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{K_1(r)}{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r+\beta(r)))}\le 1\le\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{K_1(r)}{\Phi'(\ln r)}$$

где

$$\beta(r)=\ln\Phi'(\Psi^{-1}(r))/\Phi'(\Psi^{-1}(r))$$

Здесь мы обобщим этот результат на случай рядов Дирихле с неотрицательными возрастающими к $+\infty$ показателями и произвольной абсциссой абсолютной сходимости $A\in(-\infty,+\infty]$. Отсюда получим теоремы типа теоремы Ковари для аналитических в конечном круге функций. Для ряда Дирихле

$$F(s)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{s\lambda_n},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

где $0=\lambda_0<\lambda_1<...\lambda_n\to+\infty\ (n\to\infty)$, имеющего абсциссу абсолютной сходимости $A\in(-\infty,+\infty]$, положим

$$M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in R\}\ \text{и}\ S_1(\sigma,F)=M(\sigma,F')/M(\sigma,F),\ \sigma<A.$$

Теорема 1. *Пусть* $-\infty<A\le+\infty$, $\Phi\in\Omega(A)$, *ряд* (1) *имеет абсциссу абсолютной сходимости* A *и*

$$\overline{\lim_{\sigma\to A}}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}=1. \tag{2}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{\sigma\to A}}\frac{S_1(\sigma,F)}{\Phi'(\sigma)}\ge1.$$

Теорема 2. *Пусть* α *—непрерывная положительная возрастающая к* $+\infty$ *на* $[0,+\infty)$ *функция такая, что* $\alpha(t)=o(t)$, $t\to+\infty$. *Предположим, что* $\ln n(t)\le1/\alpha(t)$ *при* $t\ge t_0$, *где*

$$n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}$$

—считающая функция последовательности $\{\lambda_n\}$, *а ряд* (1) *имеет абсциссу абсолютной сходимости* $A\in(-\infty,+\infty]$. *Пусть, наконец,* $\Phi\in\Omega(A)$ *и*

$$\frac{2\Phi'(\sigma)}{\alpha(\Phi'(\sigma))}<\Phi(\sigma)+(A-\sigma)\Phi'(\sigma),\ \sigma_0\le\sigma<A. \tag{3}$$

Тогда, если выполнено условие (2), *то*

$$\overline{\lim_{\sigma\to A}}\frac{S_1(\sigma,F)}{\Phi'\left(\psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma))\right)}\le1, \tag{4}$$

где $\beta(\sigma)/2=\alpha\left(\Phi'\left(\Psi^{-1}(\sigma)\right)\right)$.

Замечание 1. *Если* $n(t)\le pt^q\ \ (t\ge t_0)$, *то из теоремы 2 вытекает, что неравенство* (4) *выполняется с*

$$\beta(\sigma)=2\frac{q\ln\Phi'\left(\Psi^{-1}(\sigma)\right)+\ln p}{\Phi'\left(\Psi^{-1}(\sigma)\right)}$$

Однако, в этом случае можно взять

$$\beta(\sigma)=\frac{q\ln\Phi'\left(\Psi^{-1}(\sigma)\right)}{\Phi'\left(\Psi^{-1}(\sigma)\right)}$$

и условие (3) *заменить условием*

$$\ln\Phi'(\sigma)<\frac{1}{q}(\Phi(\sigma)+(A-\sigma)\Phi'(\sigma)),\ \sigma\le\sigma<A. \tag{5}$$

Замечание 2. *При* $A<+\infty$ *условие* (3) *равносильно условию* $\sigma+\beta(\sigma)<A$, *что вполне естественно, так как функция* Ψ^{-1} *определена на* $(-\infty,A)$. *Если же* $A=+\infty$, *то правые части* (3) *и* (5) *следует считать равными* $+\infty$, *так что в случае целых рядов Дирихле условия* (3) *и* (5) *излишние. Более того, из выполнения условия* $\ln n(t)=o(t)$, $t\to+\infty$ *вытекает соотношение*

$$S_1(\sigma,F)\le(1+o(1))\Phi'\left(\Psi^{-1}(\sigma+o(1))\right),\quad \sigma\to+\infty$$

Используя ту или иную шкалу роста целых и аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле с неотрицательными возрастающими к $+\infty$ показателями, из теорем 1 и 2 можно получить соответствующие следствия. Здесь мы остановимся только на классических характеристиках роста.

Для описания роста целого ряда Дирихле обычно используют R –порядок ρ_R и R –тип T_R, которые определяются равенствами [3]

$$\rho_R=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma},\qquad T_R=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M(\sigma,F)}{e^{\sigma\rho_R}}.$$

Имеет место следующее обобщение теоремы Т. Ковари.

Следствие 1. *Если целый ряд Дирихле* (1) *имеет* R *–порядок* $\rho_R\in(0,+\infty)$, R *–тип* $T_R\in(0,+\infty)$ *и* $\ln n(t)=o(t)$, $t\to+\infty$, *то имеет место точная оценка*

$$1\le\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{S\,(\sigma,F)}{T_R\rho_R\exp(\sigma\rho_R)}\le e \tag{6}$$

Пусть теперь ряд Дирихле (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости $A=0$. Для характеристики роста таких рядов обычно используется порядок ρ и тип T, которые определяются формулами

$$\rho=\varlimsup_{\sigma\to0}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\frac{1}{|\sigma|}},\qquad T=\varlimsup_{\sigma\to0}|\sigma|^{\rho}\ln M(\sigma,F).$$

Следствие 2. *Если ряд Дирихле* (1) *имеет абсциссу абсолютной сходимости* $A=0$, *порядок* $\rho\in(0,+\infty)$, *тип* $T\in(0,+\infty)$ *и* $\ln n(t)=o\left(t^{\rho(\rho+1)^{-1}}\right)$, $t\to\infty$, *то имеет место точная оценка*

$$1\le\varlimsup_{\sigma\to0}\frac{1}{T\rho}|\sigma|^{\rho+1}S_1(\sigma,F)\le\left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^{\rho+1}. \tag{7}$$

Литература

1. T. Kovari. A note on entire functions // Acad. Sci. hung, 1958, V. 8, P. 87–90.

2. М. Н. Шеремета. О производной целой функции // Укр. мат. журн., 1988, Т. 40, № 2, с. 219–224.

3. J. F. Ritt. On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. J. of Math. 1928, V. 50, №1, P. 73–86.