МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. ЧИРБА

Vilnius Technical University,
Sauletekio ave.11, Vilnius, Lithuania.

К задачам математического программирования (в частности, линейного программирования) сводятся многие оптимазационные модели экономическх систем строительной механики.

Пусть имеем следующую задачу линейного программирования

$$\max(C, X) = Z \tag{1}$$

при условиях

$$AX \leq B, \quad X \geq 0 \tag{2}$$

где C – n –мерный вектор –столбец,

A –матрица размерности $m \times n$,

B – –мерный вектор –столбец,

X – n –мерный вектор –столбец неизвестных величин.

Если задача (1)–(2) является некоторой математической моделью производства, то элементы матрицы A связаны с определенными технологическими процессами. В случае изменения технологических процессов, меняются элементы матрицы A. При этом возникает задача выбора возможных значений элементов матрицы A (в общем случае выбор значений и векторов B, C). Таким образом, получаем, что (1) зависит от A, т.е. $Z = Z(A)$ (или $Z = Z(A, B, C)$). Отсюда получаем нелинейную задачу, так как в этом случае для задачи (1)–(2) требуется найти такие значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ и элементов матрицы A (и векторов B, C), чтобы функция (1) приняла максимальное значение. В итоге получаем задачу многопараметрического программирования.

Случай, когда только вектор B или только вектор C выступают как параметры, рассмотрен в [1].

В данной работе рассматривается случай, когда только элементы одной строки матрицы A являются параметрами:

$$\max \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = z(\lambda) \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq b_1, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 2, \ldots, m, \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Задачу (3)–(6) заменим задачей:

$$\max \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = z(\lambda)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + x_{n+1} = b_1. \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} - b_i x_{n+m+1}, \quad i=2,\dots,m, \tag{8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n+m+1. \tag{9}$$

Для задачи (3), (7)−(9). применяя метод нахождения экстремальных вершин из [1], получим, что последняя таблица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1\,n+m+1} & \sum_{i=1}^{m-1} k_{1i}\lambda_{s_{1i}} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2\,n+m+1} & \sum_{i=1}^{m-1} k_{2i}\lambda_{s_{2i}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \cdots & d_{N\,n+m+1} & \sum_{i=1}^{m-1} k_{Ni}\lambda_{s_{Ni}} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Экстремальные вершины для фиксированного значения параметра $\lambda^0 = \left(\lambda_1^0,\dots,\lambda_n^0\right)$ вычисляются по следующему правилу:

1). Проверяется, составляют ли соответствующие последние и предпоследние компоненты строк j_0 и l_0 противоположные по знаку неравенства, т.е. выполняется ли одна из систем:

$$\begin{cases} d_{j_0\,n+m+1} < \sum_{i=1}^{m-1} k_{j_0 i}\lambda^0_{s_{j_0 i}} \\ d_{l_0\,n+m+1} > \sum_{i=1}^{m-1} k_{l_0 i}\lambda^0_{s_{l_0 i}} \end{cases}, \qquad \begin{cases} d_{j_0\,n+m+1} > \sum_{i=1}^{m-1} k_{j_0 i}\lambda^0_{s_{j_0 i}} \\ d_{l_0\,n+m+1} < \sum_{i=1}^{m-1} k_{l_0 i}\lambda^0_{s_{l_0 i}} \end{cases} \tag{11}$$

2). Для комбинирования выбираются те две строки j_0 и l_0, для которых по крайней мере соответствующие векторы $\bar{d}_{j_0}$ и $\bar{d}_{l_0}$ между собой совпадают по $(m-2)$ позиций или, что то же самое, различаются не более, чем двумя позициями.

3). Для строк, удовлетворяющих 1) и 2) условиям, составляем линейную комбинацию строк рассматриваемой пары с такими положительными коэффициентами, чтобы два последних новых элемента были бы равны единице.

4) Просматриваем все возможные пары строк таблицы (10) и, если для некоторой строки два последних элемента равны между собой, соответствующая экстремальная вершина получается посредством деления этой строки на предпоследний элемент.

Положительные коэффициенты ζ и ξ при этом, очевидно, совпадают с решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \zeta d_{j_0\,n+m+1} + \xi d_{l_0\,n+m+1} = 1, \\ \zeta \sum_{i=1}^{m-1} k_{j_0 i}\lambda^0_{s_{j_0 i}} + \xi \sum_{i=1}^{m-1} k_{l_0 i}\lambda^0_{s_{l_0 i}} = 1 \end{cases}$$

Тогда j_0 −ая строка умножается на величину ζ, а l_0 −ая строка−на величину ξ. Придавая параметрам произвольные значения, получим совокупность экстремальных вершин, дробно−линейно зависящих от компонент λ_j, $j=1,\dots,n$. Теперь, используя алгоритм из [2], получим "оптимальные " значения параметра λ. Далее, в задаче (1)−(2), заменяя первую строку матрицы A найденными значениями параметра λ, аналогичным образом рассмотрим задачу, в которой вторая строка является многомерным параметром. Таким образом, просматривая поочерено все строки матрицы A, найдем " оптимальные " возможные значения элементов матрицы A.

Литература

1. Э. Цой. Об одной задаче параметрического программирования // В сборнике " Вопросы экономико−математического программирования", М: из−во МГУ, 1972.
2. С. Чирба. Об одной задаче статистического линейного программирования // В сборнике " Вопросы экономико−математического моделирования", М: из−во МГУ, 1972.