К УЗКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

И. Э. ЧИЖИКОВ

Львовский университет
Кафедра теории функций и теории вероятностей
290602 г. Львов, Университетская 1, Украина

1. Введение. Придерживаемся стандартных обозначений теории распределения значений [1,5]. Так называемая "узкая" обратная задача теории распределения значений заключается в следующем.

Каждой точке a_k заданной последовательности $\{a_k\}$ из $\overline{C}$ (конечной или бесконечной) поставлено в соответствие положительное число δ_k такое, что $0<\delta_k\le 1$, $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\le 2$. Требуется указать мероморфную функцию f такую, что $\delta(a_k,f)=\delta_k$ для всех k и если $a\notin\{a_k\}$, то $\delta(a,f)$.

В 1974 г. Д. Дрейсин полностью решил обратную задачу в классе функций, мероморфных в плоскости. Еще в 1962 г. В. Фукс и У. Хейман решили "узкую". обратную задачу в классе целых функций [5]. Если ограничиться только целыми функциями конечного порядка, то соответствущие проблемы не решены до сих пор.

Тем больщой интерес представляет постановка "узкой" обратной задачи в классе функций, мероморфных (аналитических) г полуплоскости (единичном круге). Отметим следующие результаты в этом направлении.

В 1972 г. В. И. Крутинь доказал следующую теорему.

Теорема А.. *Пусть $\{\delta_k\}$ последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\le 2$, и $\{a_k\}$ –произвольная последовательность конечных комплексных чисел и $\rho\ge 0$ любое наперед заданное. Существует мероморфная при $|z|<1$ функция $g(z,\rho)$ порядка ρ такая, что* $\delta(a_n,g)\ge\delta_n/4$.

Что касается аналитических в единичном круге функций, то в 1976 г. М. А. Гирныком была решена "узкая" обратная задача в классе функций бесконечного порядка [2]. В случае конечного порядка имеет место более слабое утверждение [2].

Теорема Б. *Пусть каждой точке не более чем счетного множества различных комплексных чисел $\{a_k\}$ поставлено в соответствие число δ_k, $0<\delta_k\le 1$, причем $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\le 1$. Если выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\exp\left\{2^{3k+10}\right\}<\infty, \tag{1}$$

то существует аналитическая в единичном круге функция $f(z)$ порядка два такая, что $\delta(a_k,f)=\delta_k$ и она не имеет дефектных значений, отличных от a_k, $k=1,2,\ldots$.

Заметим, что теорему Б можно обобщить на случай произвольного $\rho\ge 0$.

Наиболее употребительными характеристиками роста и распределения значений функции, мероморфных в полуплоскости, являются характеристики, введенные М. Цудзи и Р. Неванлинной. По этим характеристикам естественным образом определяются дефектные значения в смысле Цудзи и Неванлинны. Характеристики Цудзи, в отличии от характеристик Неванлинны, можно определить для мероморфных в верхней полуплоскости $C_+=\{z:\mathrm{Im}z>0\}$ функций, если дополнительно потребовать, например, мероморфность на отрезке $[-1,1]$. Пусть

$\mathfrak{I}(r,f)$, $\mathfrak{R}(r,f)$, $\aleph(r,f)$ –характеристики Цудзи. Необходимые определения можно найти в [1,4]. Величины

$$\rho_T[f]=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\aleph(r,f)}{\ln r},\qquad \delta_T(a,f)=\lim_{r\to\infty}\frac{\mathfrak{I}(r,a,f)}{\aleph(r,f)}.$$

называются порядком и дефектом в точке a функции $f(z)$ в смысле Цудзи соответственно. Цудзи доказал, что для функций $f(z)$, у которых порядок (в смысле Цудзи) равен бесконечности, множество дефектных значений не более чем счетно. Е. Д. Файнберг в 1974 г. показала, что эта оценка множества дефектных значений не может быть уточнена.

Теорема B. *Пусть* $0<\rho<\infty$, *а* M *–любое не более чем счетное множество точек расширенной плоскости. Тогда существует мероморфная в полуплоскости* $\operatorname{Im} z\geq 0$ *функция* $f(z)$ *порядка* $\rho_T=\rho$ *такая, что множество дефектных значений совпадает с* M.

2. Основной результат. Имеет место

Теорема 1. *Пусть заданы две последовательности* $\{\delta_k\}$ *и* $\{a_k\}$ *такие, что*

$$0<\delta_k\leq 1,\ \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\leq 1,\ \{a_k\}\subset C,\ \rho>0.$$

Если существует невозрастающая последовательность $\{h_k\}$ *положительных чисел такая, что* $\sum_{k=1}^{\infty}h_k<+\infty$ *и выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|h_k\exp\left\{\frac{\delta_k}{h_k^{\rho+1}}\right\}<+\infty, \tag{2}$$

то существует аналитическая в C_+ *функция* $f(z)$ *такая, что* $\rho_T[f]=\rho$, $\delta(a_k,f)=\delta_k$ *и* $f(z)$ *не имеет других конечных дефектных значений.*

Непосредственно из теоремы 1 выводится

Следствие. *Пусть* $\{a_k\}$ *не является всюду плотным в* C и $0<\delta_k\leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\leq 1$, $\rho>0$ *Пусть также выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\delta_k^{(1+\rho)^{-1}}<\infty. \tag{3}$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 проводится методом, идеи которого восходят к В. Фуксу и У. Хейману. Несколько иная модификация этого метода применялась в [2]. Данный результат переносится также на случай единичного круга. Заметим, что в условиях теоремы Б необходимо, чтобы $a_k\to 0$ при $k\to+\infty$. В теореме 1 и в следствии, как следует из (2) и (3), вообще говоря, такое ограничение отсутствует. Более того, множество $\{a_k\}$ может быть неограниченным.

Литература

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М. "Наука", 1970.

2. М. А. Гирнык. К обратной задаче теории распределения значений для функций, аналитических в единичном круге// Укр. мат. журнал, 1977, 29, №1, с. 32–39.

3. В. И. Крутинь. О величинах дефектов Р. Неванлинны для мероморфных при $|z|<1$ функций// Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., 1973, 8, №5, с. 347–358.

4. Е. Д. Файнберг. О дефектах функций, мероморфных в полуплоскости //Теор. функций, функ. анализ и их пр., вып. 25, Харьков, 1976, с. 120–131.

5. У. К. Мероморфные функции //М., "Мир",1966.