О ПРИНЦИПЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОТРИЦАТКЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

С. РУТКАУСКАС

Institute of Mathematics and Informatics,
2600 Vilnius, Akademijos St. 4, Lithuania

Относительно принципа экстремума для модуля решений некоторых классов систем эллиптических уравнений имеется довольно много работ (см., например, [1]–[5]). Однако отдельные компоненты вектор–решений могут и не удовлетворять этому принципу. В настоящей работе для класса систем вырождающихся эллиптических уравнений приводится оценка компонент вектора–решения через верхнюю грань модулей этих компонент на границе рассматриваемой области и на многообразии вырождения.

В ограниченной области D, $\partial D=\Gamma$, эвклидова пространства $\Re^n$ точек $x=(x_1,\dots,x_n)$ рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)u_{x_i,x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x)u_{x_i}+C(x)u=0, \qquad (1)$$

где $\quad A_{ij}=diag\left(a_{ij}^{(1)},\dots,a_{ij}^{(N)}\right), \qquad B_i=diag(b_{i1},\dots,b_{iN}), \qquad C=(c_{kl})_{k,l}^{N}$

–непрерывные в $\overline{D}$ матричные коэффициенты. Предположим, что для каждого $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\Re^n$, $|\xi|\neq 0$ и выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\xi_i\xi_j\geq 0, \qquad k=\overline{1,N}.$$

Введем множества

$$A_k=\left\{x: x\in\overline{D},\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\xi_i\xi_j=0,\ |\xi|\neq 0\right\}, \qquad k=\overline{1,N}.$$

Через A обозначим объединение $\bigcup_{k=1}^{N} A_k$. Имеет место

Теорема. *Пусть*

1) *множество* $\tilde{D}=\overline{D}\setminus(A\cup\Gamma)$ *является связной областью,*

2) $u=(u_1,\dots,u_N)\in C^2(\overline{D})$ *–ограниченное по модулю в* $\overline{D}$ *решение системы* (1) *и*

$$q=\max_{1\leq k\leq N}\sup_{A\cup\Gamma}|u_k|,$$

3) *для каждого* $x\in\overline{D}$ *выполняется условие*

$$c_{kk}(x)-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}|c_{kl}(x)|\leq\nu<0, \qquad k=\overline{1,N} \qquad (2)$$

Тогда для всех $x\in\overline{D}$ *справедливо неравенство*

$$|u_k(x)|<q, \qquad k=\overline{1,N}. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть, наоборот, некоторые компоненты вектора u не удовлетворяют условию (3). Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что это компоненты

$u_1,\ldots,u_M$, $M \le N$. Тогда для каждой функции u_k, $k=\overline{1,M}$, найдется хотя бы одна точка $x^{(k)} \in \overline{D}$, в которой u_k принимает абсолютный положительный максимум, либо абсолютный отрицательный минимум и, кроме того,

$$\left|u_k\left(x^{(k)}\right)\right| \ge q, \qquad k=\overline{1,M}.$$

Пусть среди чисел $\omega_k = \left|u_k\left(x^{(k)}\right)\right|$, $k=\overline{1,M}$, число ω_s, $1 \le s \le M$, является таким, что

$$\omega_s \ge \omega_k, \quad k=\overline{1,M} \quad \text{и} \quad k \ne s \tag{4}$$

Предположим, что $x^{(s)}$ –точка положительного максимума функции u_s. Заметим, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\xi_i\xi_j > 0, \qquad x \in \overline{D}, \quad k=\overline{1,N}.$$

Поэтому в точке $x^{(s)}$ выполняется неравенство

$$L_s u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} \le 0. \tag{5}$$

Так как $\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\Big|_{x=x^{(s)}} = 0$, $i=\overline{1,n}$, то из s –го уравнения системы (1) в точке $x^{(s)}$ имеем

$$L_s u = -c_{ss}\omega_s - \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne s}} c_{sl} u_l. \tag{6}$$

При $l \le M$ из (5) следует, что $\left|u_l\left(x^{(s)}\right)\right| < q \le \omega_s$, а согласно предположению, имеющему место в процессе доказательства, также и при $M+1 \le l \le N$, т.е. $\left|u_l\left(x^{(s)}\right)\right| < q \le \omega_s$.

Учитывая эти оценки и условие (2) из (6) получаем, что в точке $x^{(s)}$ имеет место неравенство

$$L_s u \ge -\left(c_{ss} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne s}}^{N} |c_{sl}| \right)\omega_s \ge -\nu\omega_s > 0, \tag{7}$$

противоречащее (5).

Если $x^{(s)}$ является точкой абсолютного отрицательного минимума, то в соотношениях (5) и (7) знаки неравенств меняются на противоположные, что также указывает на противоречие. Следовательно, все компоненты u_k, $k=\overline{1,N}$, вектора u удовлетворяют в $\overline{D}$ неравенству (3). Теорема доказана полностью.

Литература

1 А. Б. Бицадзе. Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка //ДАН СССР, 112 (1957), 983–986.

2 М. М. Лаврентьев. О принципе максимума решения сильно эллиптических систем второго порядка //ДАН СССР, 116 (1957).

3. C. Miranda. Sul teorema del massimo modulo per una classe di sistemi elliptici di equazioni a coefficienti complessi //I st. Lombardo Accad. Sci.,Lett, Rend. A 104 (1970), 736–745.

4. A. I. Rus. Some vektor maximum principle for second order elliptic systems //Mathematica, 29 (52), 1 (1987), 89–92.

5 A. S. Mureshan. On some maximum principles //Buletinul stiintific al universitatea din Baia Mare, 10, 1–2, (1944), 15–22.