К ПОСТРОЕНИЮ КЛАССА УСРЕДНЯЕМЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. В. КРЫЛОВ

Vilnius Technical University
11 Sauletekio ave
2054 Vilnius, Lithuania

Классическая теорема (см. [1], гл. VI, § 26) об усреднении системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром ε :

$$\frac{du_j}{dt}=\varepsilon f_j(t,U),\ U=(u_1,\ldots,u_n),\ j=1,\ldots,n \tag{1}$$

позволяет установить близость решения системы (1) и решения усредненной системы

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt}=\varepsilon \bar{f}_j(t,\bar{U}),\ \bar{U}=(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n),\ j=1,\ldots,n, \tag{2}$$

где

$$\bar{f}_j=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f_j(t,U)dt \tag{3}$$

в "большом" интервале времени $t\in\left[0,O\left(\varepsilon^{-1}\right)\right]$.

Обобщение системы (1), включающее частные производные

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\lambda_j\frac{\partial u_j}{\partial x}=\varepsilon f_j(t,x,U),\ U=(u_1,\ldots,u_n),\ j=1,\ldots,n \tag{4}$$

оказывается принципиально более сложной задачей.

Различные схемы усреднения системы (4) позволяют получить формально близкую к (2) усредненную систему

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t}+\lambda_j\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x}=\varepsilon \bar{f}_i^{(l)}(\bar{U}),\ \bar{U}=(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n),\ j=1,\ldots,n \tag{5}$$

Здесь (l) определяет одну из схем усреднения (см. [2]). Например,

$$\bar{f}_j^{(1)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t,\lambda_j,U\right)dt,\ \ \bar{f}_j^{(2)}=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f_j(t,x,U)dtdx \tag{6}$$

а также неполные схемы усреднения по одной из переменных t или x оставляющих в (5) явную зависимость от другой переменной.

Заметим, что в отличие от системы (1), которая в указанном выше интервале $t\in\left[0,O\left(\varepsilon^{-1}\right)\right]$ решается численными методами введением "медленного" времени $\tau=\varepsilon t$, система (4) остается сожной для интегрирования задачей. Кроме того, во многих случаях решение усредненной системы (5) не является асимптотически близкой к решению системы (4). Рассмотрим простейший пример.

$$u_t+u_x=\varepsilon\sin(t-x),\quad u(0,x)=0. \tag{7}$$

Любая из схем усреднения (6) приводит к уравнению

$$\bar{u}_t+\bar{u}_x=0,\quad \bar{u}(0,x)=0,$$

дающему тривиальное решение $\bar{u}\equiv 0$, отличающееся от точного решения $u=\varepsilon t\sin(t-x)$ при больших значениях времени $t=O\left(\varepsilon^{-1}\right)$ на величину порядка $O(1)$.

Более последовательно учитывает структуру невозмущенной задачи следующая схема усреднения системы (4):

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \tau}+\lambda_j\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}=M_j\left[f_j\left(t,x,\bar{U}\right)\right]. \qquad (8)$$

Здесь $\tau=\varepsilon t$, $\xi=\varepsilon x$ –"медленные" переменные, $y_j=x-\lambda_j t$,–"быстрые" характеристические переменные, M_j –оператор усреднения вдоль характеристики системы (4):

$$M_j\left[f_j\right]\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f_j\left(\tau,\xi,s,y_j+\lambda_j s,\dots,\bar{u}_i\left(\tau,\xi,y_j+\left(\lambda_j-\lambda_i\right)s\right),\dots\right)ds. \qquad (9)$$

Так, например, для задачи (7) такое усреднение даст точное решение задачи:

$$\bar{u}_\tau+\bar{u}_\xi=-\sin y,\ \ \bar{u}\left(0,\xi,y\right)=0,\ \ y=x-t,\ \ \bar{u}=-\tau\sin y=\varepsilon t\sin(t-x).$$

Система (8) является в общем случае интегро–дифференциальной. Поэтому обоснование метода (т.е. доказательство близости асимптотического решения к точному) требует дополнительных ограничений на начальные данные $u_j\left(0,\xi,x\right)=u_0\left(\xi,x\right)$. (Для упрощения рассуждений зависимость правых частей от переменных t и x можно опустить.). Обозначим

$$D_0=\left\{\left(\tau,\xi:\tau+|\xi|\le c_0,\tau\ge 0\right)\right\},\ \ c_0=const>0,\ M\left(D_0\times R\right)-$$

множество ограниченных равномерно непрерывных функций $v\left(\tau,\xi,x\right)$ таких, что для любых функций $v_i\in M$ и для любых чисел $a_i\in R$, $i=1,\dots,k$ существует среднее

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\prod_{i=1}^{k}v_i\left(\tau,\xi,a_i t+y_i\right)dt$$

равномерное по всем переменным $\left(\tau,\xi,y_1,\dots,y_k\right)\in D_0\times R^k$.

В [2] рассматриваются некоторые свойства класса функций $M\left(D_0\times R\right)$. В частности показано, что множество M является банаховым пространством, и оно замкнуто относительно усреднения (9). Эти свойства позволяют доказать существование и единственность решения задачи Коши для системы (8) и показать близость полученного асимптотического решения к точному решению задачи (4).

Заметим, что множество M охватывает довольно широкие классы функций: почти периодические функции, финитные по "быстрым" переменным функции.

Литература

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.

2. А. В. Крылов. Обоснование метода внутреннего усреднения вдоль характеристик слабо–нелинейных систем //Лит. мат. сборник, 1989, Т. 29, N 4, с. 721–732.