СИЛЬНО ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Б. КВЯДАРАС

Institute of Mathematics and Informatics,
2600 Vilnius, Akademijos St. 4, Lithuania

В ограниченной области Ω комплексного переменного $N+1$-мерного пространства C^{N+1} рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$x_0^n \sum_{i,j=0}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + x_0^m \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0 \tag{1}$$

с голоморфными в Ω коэффициентами $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$. При действительных x коэффициенты уравнения действительны, а уравнение сильно эллиптично при $x_0 \neq 0$ в гиперплоскости $x=0$ происходит вырождение порядка.

Доказано, что при некоторых дополнительных предположениях ($a_{00}(x)=1$, $c(0,x_1,...x_N)=const$ и т.п.) на коэффициенты уравнения (1), оно имеет два семейства решений вида

$$u(x) = x_0^r e^{z^{-p}} R(z) v(x), \tag{2}$$

где $p=n-m-1$, если $2m \leq n$, $p=(n-2)/2$, если $2m \geq n$ и n четно, $p=n-2$, если $2m>n$ и n нечетно, r –действительное число,

$$R(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_0^k \text{ --}$$

полином от x_0 $(p-1)$-ой степени, $v(x)$ –регулярная при $x_0=0$ функция, т.е.

$$\lim_{x_0 \to 0} v(x) = e(x_1,...,x_N)$$

голоморфная переменных $x_1,...,x_N$ функция. При этом у одного семейства решений $a_0>0$, а у другого $a_0<0$.

Доказывается, что каждой функции $e(x_1,...,x_N)$, голоморфной, когда $(0,x_1,...,x_N)\in\Omega$ соответствует два решения вида (2) уравнения (1), удовлетворяющие условию $v(x)|_{x_0=0} = e(x_1,...,x_N)$, причем у одного решения $R(0)>0$, а у второго $R(0)<0$.

Каждая функция $v(x)$ является решением дифференциального уравнения вида (1) с $m=0$ и имеет асимтотическое разложение по степеням переменной x_0:

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x') x_0^k.$$

Коэффициенты $v_k(x')$ определяются из рекуррентной системы

$$\sum_{l=0}^{k} \Big[\ (l+1) b_0^{(k-1)}(x') v_{l+1} + c^{(k-1)}(x') v_l + \sum_{i=1}^{N} b_i^{(k-1)}(x') \frac{\partial v_l}{\partial x_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(l+1)a_{0i}^{(k-1)}(x')\frac{\partial v_{l+1-p}}{\partial x_i}+\sum_{i,j}^{N}a_{ij}^{(k-1)}(x')\frac{\partial^2 v_{l-p}}{\partial x_i \partial x_j}]+$$

$$+(k+1-p)(k+2-p)v^{(k-p)}=0, \qquad k=0,1,2,...,$$

$v_k(x')=0$, когда $k<0$, а $c^{(k)}(x')$, $b_l^{(k)}(x')$, $a_{\gamma g}^{(k)}(x')$, $k=0,1,...$, суть коэффициенты разложения функций $c(x)$, $b_l(x)$, и $a_{\gamma g}(x)$ $(l,\gamma,g=0,1,...,N)$ по степеням x_0 соответственно. Кроме того, каждая функция $v(x)$ представима суммой обобщенных интегралов Лапласа

$$v(x)=\sum_{l=0}^{p-1}z^{-l-1}\int_0^\infty e^{-tz^{-p}}w_l(t,x')dt,$$

где функции $w_l(t,x')$ определяются как решения интегро–дифференциальной системы уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям. При этом справедливо и другое асимптотическое разложение функции $v(x)$:

$$v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{p-1}k!\,w_l^{(k)}(0,x')z^{(k+1)p-l-1}$$

Литература

B. Kvedaras. On the asymptotic behaviour of solutions of some strongly degenerating elliptic equations with analytical coefficients. Proceedings of the First International Conference on Difference Equations. Gordon and Breach Publ. San Antonio, Usa, 1994, p.p. 327–336.