РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ИГР

Э. Г. КИРЬЯЦКИЙ

Vilnius Technical University,
Sauletekio ave.11, Vilnius, Lithuania.

Пусть множество Π имеет нечетное количество элементов. Каждый из двух играющих партнеров поочередно берет из этого множества некоторое число элементов, которое по условию не должно превышать установленной нормы. Концом игры считается та ситуация, когда все элементы множества Π взяты. Выигрывает тот из игроков, у которого в конце игры окажется четное число элементов.

Данная проблема в общем виде сформулирована в сборнике " Математическое просвещение ", 1961, выпуск I, с. 138. В частном виде (т.е. дано конкретное количество всех элементов и конкретная норма взятия) она имеется также в книге В. Н. Касаткина " Семь задач по кибер-нетике" ,Киев, 1975. В такого же рода частном виде задача встречается в известной популярной книге Б. А. Кордемского "Математическая смекалка".

Автором данной работы полностью решена сформулированная выше проблема.

1 Обозначения и терминология. Условимся в обозначениях и дадим краткие пояснения.

M –количество всех элеменов множества Π. Согласно условию M –нечетное число.

N –количество тех элементов множества Π, которые в данный момент еще не взяты игроками.

n –наибольшее число элементов, которое может взять игрок при своем ходе.

l –число элементов, которое может взять игрок при своем ходе. Ясно, что $0<l\leq n$.

m –остаток от деления N на $n+1$ или на $n+2$.

k –частное от деления N на $n+1$ или на $n+2$.

n_0, l_0, m_0, k_0 –четные значения n, l, m, k соответственно.

n_1, l_1, m_1, k_1 –нечетные значения n, l, m, k соответственно.

Запись 01 означает, что в данный момент у игрока, делающего ход, имеется четное количество элементов (в частности, нуль элементов), а у противника–нечетное количесвтво элементов.

Запись 10 означает, что в данный момент у игрока, делающего ход, имеется нечетное количество элементов, а у противника–четное количество элементов (в частности, нуль элементов).

Запись 11 означает, что в данный момент у игрока, делающего ход первым, имеется нечетное количество элементов, а у противника также нечетное количество элементов.

Запись 00 означает, что в данный момент у игрока, делающего ход первым, имеется четное количество элементов (в частности, нуль элементов), а у противника также четное количество элементов (в частности, нуль элементов).

Запись $A\left[{}^{01}; N\right]$ означает, что игрок A имеет в данный момент четное количество элементов (в частности нуль элементов), а его противник (игрок B) в данный момент имеет нечетное количество элементов. Игроками еще не взяты N Πэлементов из множества Π. Ход должен делать игрок A A.

Запись $A\left\{\left[{}^{01}; N\right], l\right\}$ означает, что в ситуации $A\left[{}^{01}; N\right]$ игрок A делает ход: он берет l эле-ментов из оставшихся N элементов множества Π.

Символы $\uparrow$ и $\downarrow$ означают выигрыш и проигрыш соответственно. Символ $\rightarrow$ означает переход от одной ситуации к другой. В качестве примера приведем отрывок сражения двух противников, состоящий из следующей цепочки ситуаций:

$$A\left\{\left[{}^{01};28\right],3\right\}\to B\left\{\left[{}^{01};25\right],4\right\}\to A\left[{}^{01};21\right]\uparrow \qquad (1)$$

Последняя ситуация в (1) означает, что игрок A при своем ходе выигрывает, хотя его ход и не указывается. Само собой разумеется, что при этом игрок A делает наилучшие ходы.

Запись, например, $\left[{}^{01};N\right]\downarrow$ означает, что игрок, делающий первым любой дозволенный условиями ход, проигрывает (здесь отсутствует сам ход и название игрока). Запись $\left[{}^{\varnothing\varnothing};M_1\right]$ означает, начало игры: оба игрока не имеют элементов из множества Π, а само множество Π имеет нечетное количество элементов, т.е. M. Здесь $M=N$. В дальнейшем, такого рода записью мы будем пользоваться при формулировках различных утверждений (*далее сокращенно* **утв.**). Иногда мы будем пользоваться также, например, записью $B\left[{}^{01};N\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$, которая означает, что игрок B, делающий первым любой дозволенный условиями ход, проигрывает, т.е. игрок A выигрывает.

Если в какой–то момент окажется, что $N=0$, то игра считается законченной и победа присуждается тому игроку, у которого в этот момент имеется четное количество элементов. Для удобства рассуждений число N записывается в виде $N=k(n+1)+m$, где $0\le m\le n$ или в виде $N=k(n+2)+m$, где $0\le m\le n+1$

2. Четыре вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Справедливы следующие утв.*

1a. $\left[{}^{01};k_0(n_1+1)\right]\uparrow$,

1b. $\left[{}^{10};k_0(n_1+1)\right]\downarrow$, (2)

1c. $\left[{}^{11};k_0(n_1+1)+1\right]\uparrow$,

1d. $\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+1\right]\downarrow$.

1a'. $\left[{}^{01};k_1(n_1+1)\right]\downarrow$,

1b.' $\left[{}^{10};k_1(n_1+1)\right]\uparrow$, (3)

1c.' $\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+1\right]\downarrow$,

1д.' $\left[{}^{00};k_1(n_1+1)+1\right]\uparrow$.

Доказательство. При $k_0=0$ справедливость утв. (2) (т.е. утв. 1a., 1b., 1c., 1d.) не вызывает сомнений. Пусть утв. (2) справедливы при некотором $k_0\ge 0$. Установим тогда, что утв. (3) (т.е. утв. 1a'., 1b'., 1c'., 1d'.) справедливы при $k_1=k_0+1$. При этом право первого хода предоставим, например, игроку A. Имеем

1a'. $A\left\{\left[{}^{01};k_1(n_1+1)\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[{}^{11};k_0(n_1+1)+n_1+1-l_1\right],n_1+1-l_1\right\}\to A\left[{}^{10};k_0(n_1+1)\right]\downarrow$,

1a'. $A\left\{\left[{}^{01};k_1(n_1+1)\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[{}^{10};k_0(n_1+1)+n_1+1-l_0\right],n_1-l_0\right\}\to A\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+1\right]\downarrow$,

1b'. $A\left\{\left[{}^{10};k_1(n_1+1)\right],n_1\right\}\to B\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

1c'. $A\left\{\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+1\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[{}^{10};k_0(n_1+1)+n_1+2-l_1\right],n_1+1-l_1\right\}\to A\left[{}^{00};k_0(n_1+1)\right]\downarrow$,

1c'. $A\left\{\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+1\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[{}^{11};k_0(n_1+1)+n_1+2-l_0\right],n_1+2-l_0\right\}\to A\left[{}^{10};k_0(n_1+1)\right]\downarrow$,

1d'. $A\left\{\left[{}^{00};k_1(n_1+1)+1\right],1\right\}\to B\left[{}^{01};k_1(n_1+1)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$.

Предположим теперь, что утв. (3) справедливы при некотором $k_1\ge 1$ и докажем справедливость утв. (2) при $k_0=k_1+1$. Право первым делать ход предоставим также игроку A. Действительно

1a. $A\left\{\left[{}^{01};k_0(n_1+1)\right],n_1\right\}\to B\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$, 1b. $A\left\{\left[^{10};k_0(n_1+1)\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[^{00};k_1(n_1+1)+n_1+1-l_1\right],n_1+1-l_1\right\}\to A\left[^{01};k_1(n_1+1)\right]\downarrow,$

1b. $A\left\{\left[^{10};k_0(n_1+1)+1\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[^{01};k_1(n_1+1)+n_1+1-l_0\right],n_1-l_0\right\}\to A\left[^{11};k_1(n_1+1)+1\right]\downarrow,$

1c. $A\left\{\left[^{11};k_0(n_1+1)+1\right],1\right\}\to B\left[^{10};k_0(n_1+1)\right]\downarrow\leftrightarrow A\uparrow,$

1d. $A\left\{\left[^{00};k_0(n_1+1)+1\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[^{01};k_1(n_1+1)+n_1+2-l_1\right],n_1+1-l_1\right\}\to A\left[^{11};k_1(n_1+1)+1\right]\downarrow,$

1d. $A\left\{\left[^{00};k_0(n_1+1)+1\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[^{00};k_1(n_1+1)+n_1+2-l_0\right],n_1+2-l_0\right\}\to A\left[^{01};k_1(n_1+1)\right]\downarrow.$

Таким образом, лемма 1 доказывается по индукции.

Лемма 2. *Пусть* $n=n_0$ и $k\geq 0$. *Тогда справедливы следующие утв.*:

$$
\begin{aligned}
&\text{2a.}\quad \left[^{01};k(n_0+2)\right]\uparrow,\\
&\text{2b.}\quad \left[^{10};k(n_0+2)\right]\downarrow,\\
&\text{2c.}\quad \left[^{11};k(n_0+2)+1\right]\uparrow,\\
&\text{2d.}\quad \left[^{00};k(n_0+2)+1\right]\downarrow,\\
&\text{2e.}\quad \left[^{00};k(n_0+2)+n_0+1\right]\uparrow,\\
&\text{2f.}\quad \left[^{11};k(n_0+2)+n_0+1\right]\downarrow.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Доказательство проведем по индукции. При $k=0$ утверждения (4) (т.е. утв. 2a., 2b., 2c., 2d., 2e., 2f.) не вызывают сомнения. Пусть утв. (4) справедливы некотором $k\geq 0$. Убедимся тогда, что утв. (4) справедливы при $k'=k+1$. Право первого хода предоставим игроку A. Имеем

2a. $A\left\{\left[^{01};k'(n_0+2)\right],1\right\}\to B\left[^{11};k(n_0+2)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow,$

2b. $A\left\{\left[^{10};k'(n_0+2)\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[^{00};k(n_0+2)+n_0+2-l_1\right],n_0+1-l_1\right\}\to A\left[^{00};k(n_0+2)+1\right]\downarrow,$

2b. $A\left\{\left[^{10};k'(n_0+2)\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[^{10};k(n_0+2)+n_0+2-l_0\right],n_0+1-l_0\right\}\to A\left[^{10};k(n_0+2)\right]\downarrow,$

2c. $A\left\{\left[^{11};k'(n_0+2)+1\right],1\right\}\to B\left[^{10};k'(n_0+2)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow,$

2d. $A\left\{\left[^{00};k'(n_0+2)+1\right],1\right\}\to B\left[^{01};k'(n_0+2)\right]\uparrow\Leftrightarrow A\downarrow,$

2d. $A\left\{\left[^{00};k'(n_0+2)+1\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[^{01};k(n_0+2)+n_0+3-l_1\right],n_0+3-l_1\right\}\to A\left[^{10};k(n_0+2)\right]\downarrow,$ где $l_1\neq 1,$

2d. $A\left\{\left[^{00};k'(n_0+2)+1\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[^{00};k(n_0+2)+n_0+3-l_0\right],n_0+3-l_0\right\}\to A\left[^{00};k(n_0+2)+1\right]\downarrow,$

2e. $A\left\{\left[^{00};k'(n_0+2)+n_0+1\right],n_0\right\}\to B\left[^{00};k'(n_0+2)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow,$

2f. $A\left\{\left[^{11};k'(n_0+2)+n_0+1\right],l_1\right\}\to B\left\{\left[^{10};k'(n_0+2)+n_0+1-l_1\right],n_0-l_1\right\}\to A\left[^{00};k'(n_0+2)+1\right]\downarrow,$

2f. $A\left\{\left[^{11};k'(n_0+2)+n_0+1\right],l_0\right\}\to B\left\{\left[^{11};k'(n_0+2)+n_0+1-l_0\right],n_0+1-l_0\right\}\to A\left[^{10};k'(n_0+2)\right]\downarrow.$

Лемма 2 доказана. Имеет место

Лемма 3. *Справедливы утв.*

Лемма 3. *Справедливы утв.*

3a. $\left[{}^{01};k_1(n_1+1)+m_0\right]\uparrow$ *при* $m_0\neq 0$, 3a'. $\left[{}^{01};k_0(n_1+1)+m_0\right]\uparrow$,

3b. $\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+m_1\right]\uparrow$ *при* $m_1\neq 1$, 3b'. $\left[{}^{11};k_0(n_1+1)+m_1\right]\uparrow$,

3c. $\left[{}^{10};k_0(n_1+1)+m_0\right]\uparrow$ *при* $m_0\neq 0$, 3c'. $\left[{}^{10};k_1(n_1+1)+m_0\right]\uparrow$,

3d. $\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+m_1\right]\uparrow$ *при* $m_1\neq 1$. 3d'. $\left[{}^{00};k_1(n_1+1)+m_1\right]\uparrow$.

Доказательство. Если в утв. 3a'., 3c'., 3b'., 3d' положить $m_0=0$ и $m_1=1$, то придем к утв. 1a., 1b'., 1c., 1d'. из леммы 1. Выделим в лемме 1 утв. 1a'., 1c.', 1b., 1d. и, опираясь на эти утв., докажем утв. 3a., 3b., 3c., 3d., 3a'., 3в'., 3c'., 3d', зная, что утв. 3a'., 3в'., 3c'., 3d'. при $m_0=0$ и $m_1=1$ в этой лемме уже доказаны. Право первым делать ход предоставим игроку A. Имеем

(3a.) $A\left\{\left[{}^{01};k_1(n_1+1)+m_0\right],m_0-1\right\}\to B\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3a'.) $A\left\{\left[{}^{01};k_0(n_1+1)+m_0\right],m_0\right\}\to B\left[{}^{10};k_0(n_1+1)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3b.) $A\left\{\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+m_1\right],m_1-1\right\}\to B\left[{}^{11};k_1(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3b'.) $A\left\{\left[{}^{11};k_0(n_1+1)+m_1\right],m_1\right\}\to B\left[{}^{10};k_0(n_1+1)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3c.) $A\left\{\left[{}^{10};k_0(n_1+1)+m_0\right],m_0\right\}\to B\left[{}^{01};k_0(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3c'.) $A\left\{\left[{}^{10};k_0(n_1+1)+m_0\right],m_0-1\right\}\to B\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3d.) $A\left\{\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+m_1\right],m_1-1\right\}\to B\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(3d'.) $A\left\{\left[{}^{00};k_0(n_1+1)+m_1\right],m_1\right\}\to B\left[{}^{01};k_0(n_1+1)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$

Лемма 4. *Справедливы утв.*

4a. $\left[{}^{01};k(n_0+2)+m_0\right]\uparrow$

4b. $\left[{}^{10};k(n_0+2)+m_0\right]\uparrow$, $m_0\neq 0$,

4c. $\left[{}^{11};k(n_0+2)+m_1\right]\uparrow$ $m_1\neq n_0+1$,

4d. $\left[{}^{00};k(n_0+2)+m_1\right]\uparrow$ $m_1\neq 1$.

Доказательство.При $m_0=0$ утв. 4a., превращается в утв. 2a., из леммы 2. Поэтому, доказывая утв. 4a., предполагаем, что $m_0\neq 0$. Утв. 4a., 4b., 4c., 4d. легко устанавливаются с помощью утв. 2b., 2d. из леммы 2. Право первым делать ход предоставим игроку A. С учетом условий, указанных в 4b., 4c., 4d., получим

(4a). $A\left\{\left[{}^{01};k(n_0+2)+m_0\right],m_0\right\}\to B\left[{}^{10};k(n_0+2)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(4b). $A\left\{\left[{}^{10};k(n_0+2)+m_0\right],m_0-1\right\}\to B\left[{}^{00};k(n_0+2)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(4c). $A\left\{\left[{}^{11};k(n_0+2)+m_1\right],m_1\right\}\to B\left[{}^{10};k(n_0+2)\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$,

(4d). $A\left\{\left[{}^{00};k(n_0+2)+m_1\right],m_1-1\right\}\to B\left[{}^{00};k(n_0+2)+1\right]\downarrow\Leftrightarrow A\uparrow$.

Итак, нами сформулированы и доказаны четыре леммы. Каждая из этих лемм по своему отражает возможные фрагменты игры, так как записанные в леммах игровые ситуации вовсе не обязаны служить началом игры. Из этих лемм следует, что начинать игру можно с любой позиции, причем исход игры при условии, что оба игрока играют наилучшим образом, можно заранее предсказать. В следующей основной теореме мы рассматриваем лишь те случаи, когда в начале игры оба игрока не имеют элементов множества Π.

3. Основная теорема. Имеет место

Теорема 1. *Справедливы следующие утв.*

1. $\begin{bmatrix} \varnothing\varnothing; M_1 \end{bmatrix}\uparrow$, *если* $M_1 = k(n_1+1)+m_1$ и $m_1 \neq 1$ при $k = k_0$,

2. $\begin{bmatrix} \varnothing\varnothing; M_1 \end{bmatrix}\downarrow$, *если* $M_1 = k_0(n_1+1)+1$,

3. $\begin{bmatrix} \varnothing\varnothing; M_1 \end{bmatrix}\uparrow$, *если* $M_1 = k(n_0+2)+m_1$ и $m_1 \neq 1$,

4. $\begin{bmatrix} \varnothing\varnothing; M_1 \end{bmatrix}\downarrow$, *если* $M_1 = k(n_0+2)+1$.

Доказательство. Утв. 1. следует из утв. 3d. и 3d'. леммы 3. Утв. 2. следует из утв. 1d. леммы 1. Утв. 3. следует из утв. 4d. леммы 4. Утв. 4. следует из утв. 2d. леммы 2.

Таким образом, утверждениями теоремы 1 исчерпываются все случаи, которые могут представиться в данной игре. Это значит, что поставленная в начале проблема, полностью решена автором данной статьи.

Опираясь на приведенные леммы, легко сформулировать теорему и в том случае, когда победа присуждается тому игроку, у которого в конце игры будет нечетное количество элементов.

Заметим, что для данной игры нетрудно составить компьютерную программу.