О МОДИФИКАЦИЯХ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

С. Я. ХАВИНСОН

Московский строительный университет

Введение. Пусть $z \in G$ —область расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, содержащая ∞ и $F = \overline{\mathbf{C}} \setminus G$. Как известно, *аналитической емкостью* $\gamma(F)$ *множества* F *называется величина*

$$\gamma(F) = \sup_{f \in B^1(G)} |f'(\infty)| = \sup_{f \in B^1(G)} \lim_{z \to \infty} |zf(z)|, \tag{0, 1}$$

где $B^1(G)$ *класс ограниченных по модулю единицей в* G *аналитических функций* $f(z)$, $f(\infty) = 0$

Величина $\gamma(F)$ была введена Л. Альфорсом [1], который отметил, что условие $\gamma(F) = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы все ограниченные аналитические в G функции были константами (т.е. класс ограниченных аналитических в G функций был тривиален). Понятие аналитической емкости оказалось весьма важным в вопросах теории устранимых особенностей и теории аппроксимации и подверглось систематическому изучению во многих работах. Систематическое изложение основных вопросов, связанных с аналитической емкостью имеется в монографиях [2], [3], а применения к теории аппроксимации—в работе А. Г. Витушкина [4], которому принадлежат основные результаты в этом направлении.

В ряде работ последнего времени (например, [5], [6], [7]) используются некоторые модификации понятия аналитической емкости. Однако, роль подобных модификаций до сих пор была скорее утилитарной, чем самостоятельной: в ряде ситуаций оценить модифицированную емкость удается, а саму аналитическую емкость— нет и тогда удовлетворялись оценкой модифицированной емкости, ставя одновремённо задачу о том, насколько полученная оценка подходит для самой аналитической емкости (оставшуюся нерешенной).

Цель настоящей статьи иная—мы собираемся показать, что модификации аналитической емкости полезны и сами по себе, в частности, в вопросах об устранимых особенностях. Это, конечно, не снимает вопроса о сравнении модификаций с основным понятием.

§ 1. Емкость Коши.

Будем рассматривать конечные комплекснозначные борелевские меры μ, замкнутые носители которых S_μ компактны в C. Потенциал Коши меры μ (преобразование Коши для μ):

$$\hat{\mu}(z) = \int_{S_\mu} \frac{d\mu_t}{t - z}. \tag{1.1}$$

Будем рассматривать также следующую величину (F и G —как в (0.1))

$$\gamma_k(F) = \sup \left| \int_{S_\mu} d\mu \right| = \sup |\hat{\mu}'(\infty)|, \quad S_\mu \subset F, \tag{1.2}$$

где верхняя грань берется по всем комплексным мерам (сосредоточенным на F), для которых

$$|\hat{\mu}(z)| \le 1, \quad z \in G. \tag{1.3}$$

Величину $\gamma_k(F)$ *естественно назвать емкостью Коши для* F. Очевидно, что $\gamma_k(F) \le \gamma(F)$. В случае, когда граница G имеет конечную длину по Пенлеве (см. [2]) $\gamma_k(F) = \gamma(F)$, так как в этом случае любая ограниченная в G аналитическая функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$ представляется потенциалом Коши меры μ, сосредоточенной на F. В теореме 4 работы [8] содержится некоторое более общее условие достаточное для равенства $\gamma_k(F) = \gamma(F)$. Будет ли это равенство выполняться для любого F —неизвестно. Важность самой величины $\gamma_k(F)$ вытекает из следующей простой, но как-будто не отмечавшейся ранее теоремы.

Теорема 1. 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\gamma_k(F)=0$.

2. *Если для какой -то меры* μ, $S_\mu \subset F$, *потенциал Коши* (1.1) *ограничен в* G, *то* $\mu \equiv 0$.

Доказательство. Очевидно, что $2 \Rightarrow 1$. Пусть теперь $\gamma_k(F)=0$, но существует мера μ, $S_\mu \subset F$, для которой $\hat{\mu}(z)$ ограничен в G и $\hat{\mu}(z) \not\equiv 0$. Разложение $\hat{\mu}(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$\hat{\mu}(z)=c_{-s}z^{-s}+c_{-(s+1)}z^{-(s+1)}+\ldots, \qquad c_{-s}\neq 0.$$

Здесь $s \geq 2$, поскольку

$$c_{-1}=-\int_F d\mu=0$$

в силу условия $\gamma_k(F)=0$. Рассмотрим функцию $f(z)=z^{s-1}\hat{\mu}(z)$. Это ограниченная аналитическая в G функция, причем $f(\infty)=0$, $f'(\infty)=c_{-s}\neq 0$. Покажем, что $f(z)$ представима потенциалом Коши некоторой меры ν, $S_\nu \subset F$. Воспользуемся критерием представимости функции потенциалом Коши (теорема 3. 5. гл. II книги [2],—теорема Хавина). Поскольку $\hat{\mu}(z)$ —потенциал Коши, то существует константа $K>0$ такая, что для любой окрестности U компакта F, имеющей хорошую границу ∂U и произвольной аналитической в $\overline{U}$ функции $g(z)$ имеем

$$\left|\int_{\partial U} g(z)\hat{\mu}(z)dz\right| \leq K\|g\|_F, \qquad \|g\|_F=\max_{t\in F}|g(t)|.$$

Но тогда для функции $f(z)$ имеем

$$\left|\int_{\partial U} g(z)f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial U} g(z)z^{s-1}\hat{\mu}(z)dz\right| \leq K\left\|z^{s-1}g(z)\right\|_F \leq K\left\|z^{s-1}\right\|_F\|g\|_F.$$

Таким образом, неравенство из теоремы Хавина выполняется для $f(z)$ с константой $K_1=K\left\|z^{s-1}\right\|_F$. Поскольку $f'(\infty)\neq 0$, то $\gamma_k(F)>0$ – вопреки условию. Итак, если $\hat{\mu}(z)$ —ограничен, то $\hat{\mu}(z)\equiv 0$. Однако, условие $\gamma_k(F)=0$ влечет за собой , что площадь F равна нулю: в противном случае существовала бы непрерывная в C функция $\hat{\sigma}(z)$ —потенциал Коши меры $d\sigma=dxdy$ на F (см. [2] —теорема на стр. 2). Значит, равенство $\hat{\mu}(z)\equiv 0$, выполняющееся в G, имеет место почти везде на плоскости. Но это влечет, что мера $\mu \equiv 0$ ([2], следствие 1.3.).

§2. Емкость Коши с вещественными мерами.

Введем величину $\gamma_k^R(F)$, определяемую соотношениями вида (1. 2) и (1. 3), но с вещественными мерами:

$$\gamma_k^R(F)=\sup\left|\int_{S_\mu} d\mu\right|, \qquad \mu\text{—вещественная мера } S_\mu \subset F, \quad |\hat{\mu}(z)|\leq 1, \quad z\in G.$$

Очевидно, что $\gamma_k^R(F)\leq \gamma_k(F)\leq \gamma(F)$. Введем еще обозначения

$$u_z(t)=\mathrm{Re}\left[(t-z)^{-1}\right], \quad v_z(t)=Jm\left[(t-z)^{-1}\right], \quad z\in G, \quad t\in F.$$

и наряду с $\gamma_k^R(F)$ рассмотрим величину

$$\beta(F)=\sup\left|\int\limits_F d\mu\right|,\quad \mu \text{ –вещественная, } S_\mu\subset F,\ \left|\int\limits_F u_z(t)d\mu\right|\le 1,$$

$$\left|\int\limits_F v_z(t)d\mu\right|\le 1$$

Легко видеть, что

$$2^{-1/2}\beta(F)\le\gamma_k^R(F)\le\beta(F)$$

и, таким образом, условия $\gamma_k^R(F)=0$ и $\beta(F)=0$ равносильны.

Для понимания смысла следующего далее утверждения мы вынуждены отослать к нашей работе [9], где вводится и исследуется понятие $\overline{\overline{O}}(p)$ полноты системы элементов банахова пространства.

Теорема 2. 1. *Пусть $\gamma_k^R(F)=0$, причем F – всюду разрывный компакт, открытое множество $V\supset F$, $M=\{a_j\}_1^\infty$ –счетное всюду плотное множество в $V\setminus F$. Тогда для произвольной непрерывной на F вещественной функции $\varphi(t)$ и $\forall\varepsilon>0$ найдутся такие точки $a_1,\dots,a_n$ из M и вещественные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$; $\tau_1,\dots,\tau_n$, что имеет место аппроксимация:*

$$\left|\varphi(t)-\sum_{j=1}^n\left(\lambda_j u_{a_j}(t)+\tau_j v_{a_j}(t)\right)\right|<\varepsilon,\qquad \sum_{j=1}^n\left(|\lambda_j|+|\tau_j|\right)<\varepsilon \tag{2. 1}$$

Обратно, если аппроксимация (2. 1) *возможна для функции $\varphi(t)\equiv 1$, то $\gamma_k^R(F)=0$.*

Доказательство основывается на использовании критерия $\overline{\overline{O}}(p)$ полноты из работы [9]. Теорема 2. 1 является аналогом теоремы об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, полученной В. П. Хавиным [10] и автором [11]. Упомянутая сейчас теорема имеет некоторые "ножницы" между необходимыми и достаточными условиями. Эти " ножницы" ликвидируются, если вместо $\gamma(F)$ использовать емкость Коши $\gamma_k(F)$, введенную в § 1.

Теорема 2. 2. *Пусть F всюду разрывный компакт. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\gamma_k^R(F)=0$.

2. *Если для какой-то вещественной меры μ, $S_\mu\subset F$, потенциал Коши* (1. 1) *ограничен в G, то* $\mu\equiv 0$.

Доказательство. Как и в теореме 1. 1 нуждается в доказательстве то, что $1\Rightarrow 2$. Пусть $\gamma_k^R(F)=0$. Возьмем некоторую вещественную меру μ, для которой $|\hat{\mu}(z)|\le 1$. Надо убедиться в том, что $\mu\equiv 0$. Мы имеем для всех $z\in G$ и, в частности, для $z=a_j\in M$ (из теоремы 1. 1),

$$\left|\int\limits_F d\mu u_z(t)\right|\le 1,\qquad \left|\int\limits_F d\mu v_z(t)\right|\le 1. \tag{2. 2}$$

Возьмем произвольную непрерывную вещественную функцию $\varphi(t)$ и, задавшись $\varepsilon>0$, воспользуемся аппроксимацией (2. 1). Из (2. 1) и (2. 2) имеем:

$$\left|\int\limits_F\varphi(t)d\mu\right|\le\int\limits_F\left|\varphi(t)-\sum_{j=1}^n(\lambda_j u_{a_j}(t)+\tau_j v_{a_j}(t))\right|d\mu+\sum_{j=1}^n|\lambda_j|\left|\int\limits_F u_{a_j}(t)d\mu\right|+\tau_j\left|\int\limits_F v_{a_j}(t)d\mu\right|<\varepsilon\|\mu\|+\varepsilon.$$

(Здесь $\|\mu\|$ –полная вариация меры μ на F.) Поэтому μ ортогональна ко всем вещественным непрерывным функциям и, следовательно, $\mu \equiv 0$.

Более подробное обсуждение приведенных в заметке фактов и другие модификации аналитической емкости будут содержаться в другой нашей работе.

Литература.

1. L. Ahlfors. Bounded analytic functions// Duke Math. Journ., 1947, V. 1, p. 1–11.
2. J. Garnett. Analytic Capacity and mesure // Lect. Notes Math., 1972, V. 297, p. 1–197.
3. С. Я. Хавинсон. Дополнительные вопросы теории устранимых особенностей аналитических функций. // М.: МИСИ, учебное пособие для факультета повышения квалификации, 1982, с.3–98.
4. А. Г. Витушкин. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // Успехи матем. наук, 1967, т. 22, № 6, с. 191–199.
5. T. Murai. Areal variable Method for the Cauchy Transform and Analytic Capcity // Lect. Notes. Math. 1988, V. 1307, p. 1–133.
6. T. Murai. Analytic Capacity and Szego Kernel Function, In " Linear and complex analysis problem. Book 3. V. 2"// Lect. Notes. Math. 1994, V. 1574, p. 158–160.
7. M. Christ. Lectures on singular integral operators Regional Conference Series in Math. № 77. // Providence: Amer. Math. Soc., 1990.
8. С. Я. Хавинсон. Несколько замечаний об интегралах типа Коши– Стильтьеса.// Литовский матем. сборник, 1962, т. II, № 2, с. 281–288.
9. С. Я Хавинсон. Некоторые вопросы полноты систем // Доклады АН СССР, 1961, т. 137, № 4, с. 793–796.
10. В. П. Хавин. О пространстве ограниченных регулярных функций. Доклады АН СССР, 1960, т. 131, № 1, с. 40–43.
11. С. Я. Хавинсон. Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль. Доклады АН СССР, 1960, т. 131, № 1, с. 44–46.