СХОДИМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Ф. ИВАНАУСКАС

Department of Mathematics, Vilnius University
Naugarduko 24, Vilnius 2006, Lithuania
E–mail: feliksas ivanauskas @ maf. vu. lt

1. **Введение.** Работа посвящена обоснованию разностных методов для решения нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ). Основное внимание уделено нелинейным уравнениям Шредингера (НУШ). Результаты работы также перенесены на уравнения Курамото–Цузуки (КЦ) и уравнения типа реакция–диффузия (РД). НУШ описывают многие задачи нелинейной оптики [1,2]. Они также используются в физике плазмы, квантовой физике, молекулярной биологии. Уравнение КЦ описывает поведение многих двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации [3]. Системы типа РД применяют при исследовании широкого класса нелинейных процессов [4].

Работа является обобщением и развитием результатов [5–7]. Основными моментами обоснования разностных методов для решения НЭУ являются:

а) применение нетрадиционных априорных оценок,

б) использование мультипликативных оценок типа Гальярдо–Ниренберга,

в) введение сеточных норм, учитывающих спектральные свойства линейного уравнения Шредингера (ЛУШ).

Исследование разностных методов для решения НУШ по сравнению с уравнениями параболического типа сталкиваются с двумя трудностями, которые обнаруживаются уже на уровне линейных уравнений. Во первых, для ЛУШ не имеет места принцип максимума и отсутствуют соответствующие априорные оценки. Во вторых, для устойчивости явной разностной схемы для ЛУШ возникает очень жесткое и неестественное условие на соотношение между шагами сетки $\tau/h^4 \le c$. Отметим, что безразмерной величиной является отношение τ/h^2, а не τ/h^4 [8].

Для решения НУШ, как правило, имеют место априорные оценки в классе L_2, в некоторых случаях в W_2^1. Поэтому при исследовании разностных схем для НУШ была предпринята попытка обобщить понятие классических априорных оценок и получить эффективные оценки. В классических априорных оценках

$$\|u(t)\| \le c\|u(0)\|$$

постоянная c не зависит от решения дифференциальной задачи. В работах [5–7] введено обобщение априорных оценок вида

$$\|u(t)\|_{W_2^1} \le c\|u(0)\|_{W_2^1},$$

где постоянная c уже зависит от некоторой нормы решения дифференциальной задачи и длины отрезка изменения эволюционной переменной. Так для $n+1$–мерной (n –число пространственных переменных) задачи постоянная c зависит от нормы решения $C^j(Q)$, где $Q=[0,T]\times\bar{\Omega}$, $j=[(n-1)/2]$.

При исследовании сходимости разностных методов для решения НУШ актуально наличие априорных оценок в норме C. Такая оценка сводит вопрос о сходимости нелинейной разностной схемы по существу к вопросу об исследовании линейной разностной схемы. Так как для решения ЛУШ имеют место априорные оценки в норме W_2^l, то возникла идея о получении априорных оце–

нок в норме W_2^l для решения разностной задачи. Для этого при исследовании НУШ были получены обобщенные классические априорные оценки вида

$$\|u(t)\|_{W_2^l} \le c\|u(0)\|_{W_2^l}, \tag{1.1}$$

где постоянная c уже зависит от нормы решения дифференциальной задачи в $C^j(Q)$ и длины отрезка изменения эволюционной переменной. Оценки этого вида были получены как для дифференциальной, так и для разностной задач. В случае дифференциальной задачи такая оценка дает качественную характеристику решения. Наибольшей ценностью априорных оценок вида (1.1) является то, что в случае сеточных норм постоянную c удается освободить от зависимости нормы решения разностной задачи $C^j(Q_h)$. Точнее, норму решения разностной задачи удается заменить через норму решения исходной дифференциальной задачи. В итоге получаем эффективную априорную оценку для решения разностной задачи в норме W_2^l. Эта априорная оценка играет важную роль при доказательстве сходимости и устойчивости разностной схемы.

В численном анализе при исследовании нелинейных разностных схем традиционно применяется оценка

$$\|u\|_C \le ch^{-n/2}\|u\|_{L_2}, \tag{1.2}$$

где n –число измерений. Оценка (1.2) является типичной оценкой численного анализа и не имеет непрерывного аналога. Использование этой оценки при обосновании разностных схем приводит, как правило, к ограничению на соотношение между шагами по эволюционной и пространственным переменным. Следует отметить, что при помощи оценки (1.2) и двухсторонних оценок можно получить [9] также безусловную сходимость при $n=2$. Однако, при $n>2$ использование оценки (1.2) становится не только малоэффективным, но часто невозможным. В работах [5–7] вместо оценки (1.2) было предложено использовать мультипликативные оценки типа Гальярдо–Ниренберга

$$\|u\|_C \le c\|u\|_{L_2}^{\alpha}\|u\|_{W_2^l}^{1-\alpha}.$$

Применение этих оценок требует гладкости решения разностной задачи по крайней мере в норме W_2^l, $2l(1-\alpha)>1$, $1>\alpha>(n-1)/n$. Это гарантирует ограниченность решения в норме C. Такая гладкость решения в норме W_2^l согласуется в некоторой степени с гладкостью решения дифференциальной задачи необхомой для аппроксимации. Поэтому естественно ожидать, что решение разностной задачи в сеточной норме может иметь ту же гладкость решения дифференциальной задачи. Почему выбрана норма W_2^l? Этот выбор обусловлен наличием априорных оценок для ЛУШ в W_2^l и спектральными свойствами ЛУШ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u, \qquad i^2=-1,$$

которое имеет тригонометрические функции в качестве собственных. В случае равномерной сетки тригонометрические функции (синусы и косинусы) обладают ортогональностью в соответственно подобранных сеточных нормах. Поэтому сеточную норму можно определить, используя равенство Парсеваля. Это позволяет получить сеточный аналог априорной оценки разностной задачи для ЛУШ в норме W_2^l, что в конечном итоге позволяет получить эффективные априорные оценки для решения разностной задачи в норме W_2^l. Следует также отметить, что разрешимость нелинейной разностной задачи, сходимость и устойчивость схемы в сущности являются следствием предположения о существовании достаточно гладкого решения НУШ. Последнее суждение можно сформулировать еще и так: если существует достаточно гладкое решение НУШ, то можно построить разностную схему, решение которой сходится, и еще имеют место оценки устойчивости решения разностной задачи. Это высказывание как бы является дальнейшим обобщением основополагающей теоремы разностных методов о том, что из аппроксимации и устойчивости вытекает сходимость. В данном случае условие устойчивости гарантируется обобщенными априорными оценками для

НУШ. В работе исследуются разностные схемы типа Кранка–Никольсона для решения первой и второй краевых задач и задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений.

2. **Сходимость. Устойчивость.** Пусть $\Omega=\{x: 0<x_i<1,\ i=1,\dots,n\}$ есть n –мерный единичный куб в R^n, $\partial\Omega$ –граница области и $Q=]0,T]\times\Omega$. Основные результаты изложим на примере второй краевой задачи для системы НУШ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+F(u),\quad (t,x)\in Q, \tag{2.1}$$

$$u(0,x)=u^{(0)}(x),\qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}=0,\qquad (t,x)\in]0,T]\times\partial\Omega. \tag{2.3}$$

Здесь A_j –диагональные матрицы с мнимыми коэффициентами. Если диагональные матрицы A_j с комплексными коэффициентами, то (2.1) является уравнениями КЦ, если же с действительными коэффициентами, то (2.1) является системой уравнений типа РД. Отметим, что исследование системы (2.1) ввиду диагональности матриц A_j принципиально не отличается от исследования одного уравнения. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(u),\qquad (t,x)\in Q, \tag{2.4}$$

$$u(0,x)=u^{(0)}(x),\qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}=0,\qquad (t,x)\in]0,T]\times\partial\Omega, \tag{2.6}$$

$$Lu=\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

где a_j –комплексные числа.

В большинстве задач [1–4] функция $f(u)$ является многочленом. Поэтому в дальнейшем ограничимся случаем функции $f(u)$, являющейся многочленом. Кроме того, будем придерживаться обозначений [8].

Задаче (2.4)–(2.6) поставим в соответствие неявную схему с весами Кранка–Никольсона

$$p_t=L_h p^{(\sigma)}+g(p,\hat p),\qquad (t,x)\in Q_h, \tag{2.7}$$

$$p(0,x)=u^{(0)}(x),\qquad x\in\overline{\Omega}_h, \tag{2.8}$$

$$l_h p^{(\sigma)}=0,\qquad (t,x)\in\omega_\tau\times\partial\Omega_h, \tag{2.9}$$

где

$$L_h p=\sum_{j=1}^{n}a_j p_{\bar{x}_j x_j},$$

$$l_h p^{(\sigma)}=p_{x_k}^{(\sigma)}-\frac{h}{2a_k}\left(p_t-\sum_{j=1,j\neq k}^{n}a_j p_{\bar{x}_j x_j}^{(\sigma)}-g(p,\hat p)\right).$$

Предположим, что

а) $0.5\le\sigma\le1$

Функция $g(p,\hat p)$ является многочленом относительно $p,\hat p$. В простейшем случае можно взять $g(p,\hat p)=f\left(p^{\sigma}\right)$. Сформулируем утверждение, дающее основу для существования априорной оценки решения разностной задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* а) *и существует решение задачи* (2.4)–(2.6)

$$p \in W_2^l(\Omega_h) \cap C^j(Q_h), \qquad j=[(n-1)/2].$$

Тогда существует такая постоянная $\tau_0 \geq 0$, *что при* $\tau \leq \tau_0$ *справедлива оценка*

$$\|p(t)\|_{W_2^l(\Omega_h)} \leq c\|p(0)\|_{W_2^l(\Omega_h)}, \qquad t \in \bar{\omega}_\tau,$$

где

$$c=c\left(\|p\|_{C^j(Q_h)}, \|p(0)\|_{W_2^{l-1}(\Omega_h)}, T, n, l\right).$$

Сформулируем утверждение о сходимости разностной задачи.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* а) *и* $r=2(l-s)(1-\alpha)-1>0$, $\quad 1>\alpha>(n-1)/n$. *Тогда существуют такие постоянные* $\tau_0, h_0>0$, *что при* $\tau \leq \tau_0$, $h \leq h_0$ *существует единственное решение задачи* (2.7)–(2.9), *сходящееся к решению задачи* (2.4)–(2.6) *и справедливы оценки*

$$\|u(t)-p(t)\|_{W_2^s(\Omega_h)} \leq c \max_{\omega_\tau} \|\Phi(t)\|_{W_2^s(\Omega_h)},$$

$$\|u(t)-p(t)\|_{C_2^s(\Omega_h)} \leq c\left(\max_{\omega_\tau} \|\Phi(t)\|_{W_2^s(\Omega_h)}\right)^\beta,$$

$t \in \omega_\tau$, $\quad s \leq l-n\backslash 2$, $\quad \beta=r/(r+1)$, *где* $\Phi(t)$ *–погрешность аппроксимации.*

Исследуем устойчивость. Пусть u_1, u_2 и p_1, p_2 –решения задач (2.4)–(2.6) и (2.7)–(2.9) с начальными данными $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют такие постоянные* $\tau_0, h_0>0$, *что при* $\tau \leq \tau_0$, $h \leq h_0$ *справедлива оценка*

$$\|p_1(t)-p_2(t)\|_{L_2(\Omega_h)} \leq c\|u_1(0)-u_2(0)\|_{L_2(\Omega_h)}, \qquad t \in \omega_\tau,$$

где постоянная c *не зависит от* τ, h.

Эти результаты переносятся на уравнения КЦ и РД. В работе [10], применяя эту технику, обоснована схема расщепления.

Литература

1. А. П. Сухоруков. Нелинейное волновое взаимодействие в оптике и радиофизике, М.: Наука, 1988.
2. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов. Математическое моделирование в нелинейной оптике, М.: Изд–во Моск. ун–та, 1989.
3. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. Введение в синергетику, М.: Наука, 1990.
4. C. V. Pao. Nonlinear Parabole and Eliptic Equations. Plenum Press, New York, 1992.
5. Ф. Ф. Иванаускас. Сходимось и устойчивость разностных схем для нелинейных уравнений Шредингера, уравнения Курамото–Цузуки и систем типа реакция–диффузия. ДАН России, Т. 337 (1994), №5.
6. Ф. Ф. Иванаускас. Сходимость и устойчивость разностных схем для нелинейных уравнений Шредингера, уравнения Курамото–Цузуки и систем типа реакция–диффузия. Лит. мат. сб. Т. 34 (1994), №1, с. 32–51.
7. Ф. Ф. Иванаускас. Сходимость и устойчивость разностных схем для нелинейных уравнений шредингеровского типа. Лит. мат. сб., Т. 31 (1991), №4,с. 606–621.
8. А. А. Самарский. Теория разностных схем, М.: Наука, 1989.
9. А. Б. Борисов. Симметрические схемы типа Кранка–Никольсона для решения нелинейных уравнений Шредингера. Методы и алгоритмы численного анализа и их приложения. Под редакцией Н. С. Бахвалова, В. А. Морозова. Изд–во Моск. ун–та, 1989, с. 76–103.
10. Ф. Ф. Иванаускас. Метод расщепления для решения нелинейных уравнений шредингеровского типа, Ж. вычисл. матем. и физ. ,Т. 29 (1989), №12,с. 1830–1838.