СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. А. ЕРОВЕНКО

Belarusian State University
Fr. Skaryny Avenue 4,
22005 Minsk, Repablic Belarus

Примеры операторов, спектр и существенные спектры которых явно вычисляются в различных банаховых пространствах, важны по многим причинам. Одна причина—это возможность выяснить некоторые закономерности, которые трудно прослеживаются в общей постановке. Т.е. анализ конкретных содержательных примеров или классов операторов является первым шагом при доказательстве утверждений общего характера. Другая причина состоит в том, что операторы, спектр и существенные спектры которых известны, широко используются в теории возмущений. С помощью этих операторов можно получить нужную информацию о существенных спектрах или их локализации для более широких классов операторов, прямое вычисление спектров которых довольно затруднительно.

Один из экономных и элегантных способов определения различных существенных спектров, который в определенном смысле упорядочивает их по "набуханию" или расширению, связан с их заданием через описание определенных фредгольмовых свойств оператора.

Пусть T —замкнутый линейный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве X, $T: X \to X$. Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости C:

$$\Delta_1(T):=\{\lambda \in C: \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I)\},$$

$$\Phi^+(T):=\{\lambda \in C: \lambda \in \Delta_1(T) \text{ и } nul(T-\lambda I)<\infty\},$$

$$\Phi^-(T):=\{\lambda \in C: \lambda \in \Delta_1(T) \text{ и } def(T-\lambda I)<\infty\},$$

$$\Delta_2(T):=\Phi^+(T) \cup \Phi^-(T) = s-\Phi(T),$$

$$\Delta_3(T):=\Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T),$$

$$\Delta_4(T):=\{\lambda \in C: \lambda \in \Delta_3(T) \text{ и } ind(T-\lambda I)=0\},$$

$$\Delta_5(T):=\{\lambda \in C: \lambda \in \Delta_4(T) \text{ и } \exists O(\lambda)\setminus\{\lambda\} \subset \rho(T)\}.$$

Существенные спектры оператора T определяются следующим образом:

$$\sigma_{ek}(T):=C \setminus \Delta_k(T), \quad k=1,2,3,4,5,$$

$$\sigma^+_{e2}(T):=C \setminus \Phi^+(T), \qquad \sigma^-_{e2}(T):=C \setminus \Phi^-(T).$$

При $k=1$ имеем существенный спектр Гольдберга, при $k=2$ —существенный спектр Като, при $k=2^+$ —существенный спектр Вольфа, при $k=3$ —существенный спектр Фредгольма, при $k=4$ —существенный спектр Вейля или существенный спектр Шехтера, при $k=5$ — существенный спектр Браудера. Встречаются и другие существенные спектры. Мы рассматриваем существенные спектры, наиболее часто встречающиеся в приложениях. Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{e1}(T) \subseteq \sigma_{e2}(T) \subseteq \sigma^{+}_{e2}(T) \subseteq \sigma_{e3}(T) \subseteq \sigma_{e4}(T) \subseteq \sigma_{e5}(T).$$

В работах Густафсона показано, что включения вообще говоря могут быть собственными.

Описанные выше существенные спектры обладают рядом интересных свойств, служащих поводом для изучения таких спектров для конкретных классов операторов. Приведем примеры.

1). Существенные спектры σ_{ek}, $k=2,2^{\pm},3,4$, в силу теоремы об устойчивости полуфредгольмовых операторов, инвариантны при относительно компактных и "малых" возмущениях.

2). $p(\sigma_{ek}(\mathrm{T}))=\sigma_{ek}(p(\mathrm{T}))$, $k=2^{\pm},3,5$, для полинома p и плотно определенного замкнутого линейного оператора T с непустым резольвентным множеством, $\rho(\mathrm{T})\neq\varnothing$, или с более скромным ограничением—с непустой фредгольмовой областью, $\Phi(\mathrm{T})\neq\varnothing$.

3). Существенный спектр Вольфа σ_{e2}^{+} хорошо "считабелен" с помощью так называемых сингулярных последовательностей. А именно, если $(x_n)\subset D(\mathrm{T})$, $\|x_n\|=1$, не содержит сходящейся подпоследовательности и $(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})x_n\to 0$, то тогда $\lambda\in\sigma_{e2}^{+}(\mathrm{T})$.

Отметим также, что существенный спектр Фредгольма σ_{e3} наиболее естественный в теории ограниченных операторов, так как $\sigma_{e3}(\mathrm{T})=\sigma(\hat{\mathrm{T}})$, где $\hat{\mathrm{T}}=\mathrm{T}+\mathrm{K}(\mathrm{X})\in\mathrm{B}(\mathrm{X})/\mathrm{K}(\mathrm{X})$.

Рассмотрим две формальные дифференциальные операции

$$\tau:=\sum_{k=0}^{n}a_k D^k, \qquad \omega:=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k D^k$$

где $D:=d/dt$, a_k —комплексные числа и $a_n\neq 0$. Первые две сформулированные ниже теоремы справедливы для дифференциальной операции τ и в случае переменных коэффициентов, если $a_k(t)\in C^k[a,\infty)$ и $1/a_n\in L^{\infty}(a,\infty)$.

Максимальный оператор, порожденный τ, p и $[a,\infty)$, определяется следующим образом:

$$\mathrm{T}_a:=\mathrm{T}(\tau,p,[a,\infty)),\quad -\infty<a<\infty,\quad 1\leq p\leq\infty,$$
$$D(\mathrm{T}_a):=\left\{f: f^{(n-1)}\in AC_{loc}[a,\infty); f,\tau f\in L^p(a,\infty)\right\},$$
$$\mathrm{T}_a f:=\tau f,\ f\in D(\mathrm{T}_a).$$

Минимальный оператор $\mathrm{T}_{0a}:=\mathrm{T}_0(\tau,p,[a,\infty))$, $-\infty<a<\infty$, для $1\leq p<\infty$ определяется как замыкание сужения максимального оператора T_a на множество функций из $D(\mathrm{T}_a)$, имеющих компактный носитель, а для $1<p\leq\infty$ определяется через банаховый сопряженный :

$$\mathrm{T}_{0a}:=\mathrm{T}'(\tau^*,p',[a,\infty)),\ \text{где}\ \tau^* f:=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k(a_k f)$$

В частности, максимальные и минимальные операторы удовлетворяют следующим соотношениям двойственности:

$$\mathrm{T}_0'(\tau,p,[a,\infty))=\mathrm{T}(\tau^*,p',[a,\infty)),\quad \mathrm{T}'(\tau,p,[a,\infty))=\mathrm{T}_0(\tau^*,p',[a,\infty))\ \text{для}\ 1\leq p<\infty,$$
$$\mathrm{T}_0(\tau,p,[a,\infty))=\mathrm{T}'(\tau^*,p',[a,\infty)),\quad \mathrm{T}(\tau,p,[a,\infty))=\mathrm{T}'_0(\tau^*,p',[a,\infty))\ \text{для}\ 1<p\leq\infty.$$

С помощью контрпримера Стоуна, показывающего, что при расширении области определения максимального оператора область определения сопряженного оператора $\tilde{\mathrm{T}}'$ равна $D(\tilde{\mathrm{T}}')=\{0\}$, можно объяснить почему мы максимальный оператор называем "максимальным," а по нему соответствующий оператор T_0 минимальным.

В следующей теореме описываются некоторые свойства существенных спектров обыкновенных диф—ных операторов с достаточно гладкими коэффициентами в банаховых пространствах.

Теорема 1. *Пусть* $S_a:=S(\tau,p,[a,\infty))$ *—замкнутый линейный оператор, определенный в* $L^p(a,\infty)$, $-\infty<a<\infty$, $1\leq p\leq\infty$, *являющийся продолжением минимального оператора* T_{0a} *и сужением максимального оператора* T_a, $\mathrm{T}_{0a}\subset S_a\subset\mathrm{T}_a$. *Тогда существенные спектры с* σ_{e1} *по* σ_{e3} *для* S_a *совпадают, т.е.*

$$\sigma_{e1}(S_a)=...=\sigma_{e3}(S) \tag{1}$$

и, кроме того, они совпадают и для всех операторов из $[T_{0a}, T_a]$, *т.е.*

$$\sigma_{ek}(T_{0a}) = \sigma_{ek}(S_a) = \sigma_{ek}(T_a), \qquad k = 1,2,2^{\pm},3. \tag{2}$$

Для минимальных и максимальных операторов и оставшихся существенных спектров выполняются равенства:

$$\sigma_{e4}(T_{0a}) = \sigma_{e5}(T_{0a}) = \sigma(T_{0a}), \tag{3}$$

$$\sigma_{e4}(T_a) = \sigma_{e5}(T_a) = \sigma(T_a), \tag{4}$$

а если $T_{0a} \neq S_a \neq T_a$, *то*

$$\sigma_{e4}(T_{0a}) \neq \sigma_{e4}(S_a) \neq \sigma_{e4}(T_a). \tag{5}$$

Укажем ключевые моменты доказательства теоремы 1.

Для равенства (1). Максимальный диф–ный оператор T_a –конечномерное порядка n расширение минимального диф–ного оператора T_{0a}, т.е.

$$\dim D(T_a)/D(T_{0a}) = n$$

и, следовательно,

$$nul T_{0a} \le nul T_a \le nul T_{0a} + n, \quad def T_a \le def T_{0a} \le def T_a + n, \quad ind T_a = ind T_{0a} + n.$$

Для области нормальной разрешимости оператора S_a справедливо равенство $\Delta_1(S_a) = \Phi^+(S_a)$, так как для всех $\lambda \in C$, $nul(T_a - \lambda I) \le n$. Кроме того, используются соотношения двойственности.

Равенство (2) достаточно доказать для существенного спектра Вольфа σ_{e2}^{+}, используя его характеристику с помощью сингулярных последовательностей. Для доказательства равенств (3), (4)можно воспользоваться тем, что для $\lambda \in C$ минимальный оператор $T_{0a} - \lambda I$ инъективен, т.е. $nul(T_{0a} - \lambda I) = 0$, а для $\lambda \in \Delta_1(T_a)$ максимальный оператор $T_a - \lambda I$ сюръективен и $def(T_a - \lambda I) = 0$. Неравенство (5) очевидно.

В следующей теореме используется идея метода расщепления для существенных спектров обыкновенных диф–ных операторов в банаховых пространствах.

Теорема 2. *Пусть* $S_a := S(\tau, p, [a.\infty))$ *дифференциальный оператор, определенный в теореме*1, *и* $-\infty < a < \infty$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда* $\forall b \in (a.\infty)$ *имеют мето равенства*

$$\sigma_{ek}(S_a) = \sigma_{ek}(S_b), \quad k = 1,2,2^{\pm},3. \tag{6}$$

Кроме того, для существенного спектра Вейля σ_{e4} ***минимальных и максимальных операторов справедливы равенства:***

$$\sigma_{e4}(T_{0a}) = \sigma_{e4}(T_{0b}), \tag{7}$$

$$\sigma_{e4}(T_a) = \sigma_{e4}(T_b). \tag{8}$$

Дадим общую схему доказательства. Для получения равенства (6) воспользуемся вспомогательным диф–ным оператором $T_{0ab} := T_{0ab}(\tau, p, [a.\infty))$, задаваемым формулой $T_{0ab} f := \tau f$ для $f \in D(T_{0ab})$, где

$$D(T_{0ab}) := \left\{ f : f^{(n-1)} \in AC_{loc}[a.\infty); f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0, \; j = \overline{0.n-1}; f, \tau f \in L^p(a.\infty) \right\}.$$

В прямой сумме банаховых пространств $L^p(a.\infty) = L^p(a,b) + L^p(b.\infty)$ запишем его в виде

$$T_{0ab} = T_0(\tau, p, [a.b]) + T_{0b}.$$

Так как для существенных спектров Фредгольма σ_{e3} справедливо равенство

$$\sigma_{e3}(T_{0ab}) = \sigma_{e3}(T_0(\tau, p, [a.b])) \cup \sigma_{e3}(T_{0b})$$

и $\sigma_{e3}(\mathrm{T}_0(\tau,p,[a,b]))=\varnothing$, то $\sigma_{e3}(\mathrm{T}_{0a})=\sigma_{e3}(\mathrm{T}_{0b})$, поскольку минимальный оператор T_{0a} конечномерное порядка n продолжение вспомогательного оператора T_{0ab}.

Для доказательства равенств (7),(8) введем вспомогательный оператор $\mathrm{T}_1:=\mathrm{T}_1(\tau,p,[a,b])$ с областью определения

$$D(\mathrm{T}_1):=\left\{f:F^{(n-1)}\in AC_{loc}[a,b];\ f^{(j)}(b)=0,\ j=\overline{0,n-1}\right\},$$

задаваемый равенством $\mathrm{T}_1 f:=\tau f$, и определим оператор

$$\Re:=\mathrm{T}_1(\tau,p,[a,b])+\mathrm{T}_{0b}.$$

Так как существует ограниченный обратный оператор T_1^{-1}, который является компактным и $\rho(\mathrm{T}_1)\neq\varnothing$, то $\sigma_{e4}(\mathrm{T}_1)=\varnothing$ и, следовательно, $\sigma_{e4}(\Re)=\sigma_{e4}(\mathrm{T}_{0b})$. Осталось заметить, что операторы $\Re$ и T_{0a} конечномерные порядка n расширения оператора T_{0ab}.

В следующих двух теоремах получены явные формулы для вычисления существенных спектров диф–ных операторов с постоянными коэффициентами и диф–ных операторов Эйлера.

Теорема 3. *Для существенных спектров минимального* $\mathrm{T}_{0\tau}:=\mathrm{T}_0(\tau,p,[a,\infty))$ *и максимального* $\mathrm{T}_\tau:=\mathrm{T}(\tau,p,[a,\infty))$ *дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в банаховых пространствах* $L^p(a,\infty)$, $-\infty<a<\infty$, $1\le p\le\infty$ *и дифференциалью оператора* S_τ, $\mathrm{T}_{0\tau}\subset S_\tau\subset\mathrm{T}_\tau$, *справедливы равенства:*

$$\sigma_{ek}(S_\tau)=\{\mathrm{P}(\lambda):\mathrm{Re}\lambda=0\},\quad k=1,2,2^{\pm},3,$$
$$\sigma_{ek}(\mathrm{T}_{0\tau})=\sigma(\mathrm{T}_{0\tau})=\{\mathrm{P}(\lambda):\mathrm{Re}\lambda\ge0\},\quad k=4,5,$$
$$\sigma_{ek}(\mathrm{T}_\tau)=\sigma(\mathrm{T}_\tau)=\{\mathrm{P}(\lambda):\mathrm{Re}\lambda\le0\},\quad k=4,5,$$

где полином P *определяется по операции* τ, $\mathrm{P}(t):=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k t^k$.

Теорема 4. *Для существенных спектров минимального* $\mathrm{T}_{0\omega}:=\mathrm{T}_0(\omega,p,[a,\infty))$ *и максимального* $\mathrm{T}_\omega:=\mathrm{T}(\omega,p,[a,\infty))$ *дифференциальных операторов Эйлера, порожденных дифференциальной опе–рацией* ω *в банаховых пространствах* $L^p(a,\infty)$, $0<a<\infty$, $1\le p\le\infty$ *выполняются равенства:*

$$\sigma_{ek}(\mathrm{T}_{0\omega})=\sigma_{ek}(\mathrm{T}_\omega)=\{Q(\lambda):\mathrm{Re}\lambda=0\},\ k=1,2,2,^{\pm},3,$$
$$\sigma_{ek}(\mathrm{T}_{0\omega})=\sigma(\mathrm{T}_{0\omega})=\{Q(\lambda):\mathrm{Re}\lambda\ge0\},\ k=4,5,$$
$$\sigma_{ek}(\mathrm{T}_\omega)=\sigma(\mathrm{T}_\omega)=\{Q(\lambda):\mathrm{Re}\lambda\le0\},\ k=4,5,$$

где полином Q *определяется формулой*

$$Q(z):=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\prod_{j=0}^{k-1}\left(z-\left(\frac{1}{p}+j\right)\right).$$

Заметим, что для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами сущест–венные спектры p –независимы, а для дифференциальных операторов Эйлера p –зависимы.

Литература

1 В. А. Еровенко // Докл. АН Беларуси, 1992, Т. 36, №6, 490–493.
2 .В. А. Еровенко // Докл. АН Беларуси, 1994, Т. 38, №1, 21–26.
3. В. А. Еровенко // Докл. АН Беларуси, 1995, Т. 39, №3, с. 26–30.
4. В. А. Еровенко // Докл. АН Беларуси, 1996, Т. 40, №2, с. 39–43.
5. В. А. Еровенко // Дифферен. уравнения, 1996, Т. 32, №8, с. 1024.
6. В. А. Еровенко // Дифферен. уравнения, 1996, Т. 32, №9, с. 1153–1161.