

ON RELIABILITY-BASED STRUCTURAL OPTIMISATION USING STOCHASTIC QUASIGRAIENT METHODS

E.-R. Vaidogas

To cite this article: E.-R. Vaidogas (1995) ON RELIABILITY-BASED STRUCTURAL OPTIMISATION USING STOCHASTIC QUASIGRAIENT METHODS, Statyba, 1:2, 43-64, DOI: [10.1080/13921525.1995.10531512](https://doi.org/10.1080/13921525.1995.10531512)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1995.10531512>



Published online: 30 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 48

ZUR ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORETISCH GESTÜTZTEN TRAGWERKS- OPTIMIERUNG MIT VERFAHREN DER STOCHASTISCHEN QUASIGRA- DIENTEN

E.-R. Vaidogas

1. Einführung

Viele wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme, die sowohl bei der Analyse als auch bei der Optimierung von Tragwerken entstehen, können am besten mit Hilfe der *Monte-Carlo*-Methode, d.h. mit statistischen Mitteln, gelöst werden. Das wichtigste von ihnen ist die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit eines Tragwerkes. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird auf ein Problem der Integration über einem mehrdimensionalen Raum zurückgeführt. Man erkennt, daß die Lösung dieses Problems mit der *Monte-Carlo*-Methode theoretisch sehr einfach ist. Andererseits ist aber ein hoher numerischer Aufwand nötig und keine sehr hohe Genauigkeit auf diesem Wege erreichbar.

Das allgemeine Schema der zuverlässigkeitstheoretisch gestützten Optimierung eines Tragwerkes schließt mehrfache Durchführung seiner Analyse und in erster Linie mehrfache Berechnung seiner Versagenswahrscheinlichkeit ein. Eine konventionelle Anwendung dafür der einfachen *Monte-Carlo*-Methode ist zu allererst wegen eines extrem hohen numerischen Aufwands völlig unannehmbar. Aus anderer Seite würde eine Einbeziehung dieses universellen statistischen Mittels der Analyse dazu führen, daß es eine breite Klasse von Aufgaben der Tragwerksoptimierung lösbar wäre.

Eine exzellente Möglichkeit, die *Monte-Carlo*-Methode in der zuverlässigkeitstheoretisch gestützten Tragwerksoptimierung rationell auszunützen, bieten Verfahren der stochastischen Quasigradienten. Sie bilden eine Verfahrensklasse der Theorie der stochastischen Programmierung. Man kann mit ihrer Hilfe Probleme der Tragwerksoptimierung lösen, wenn sie in Form von Aufgaben der stochastischen Programmierung formuliert werden. Solches Vorgehen steht im Gegensatz zur dominierenden Anwendung in der zuverlässigkeitstheoretisch gestützten Tragwerksoptimierung der nichtlinearen Programmierung.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Tragwerksoptimierung unter Einbeziehung eines Verfahrens der stochastischen Quasigradienten vorgenommen. Aufgabenstellungen und numerisches Beispiel werden aufgrund eines klassischen zuverlässigkeitstheoretischen Optimierungsproblems, d.h. einer

Minimierung von Baukosten (oder Gewicht) eines Tragwerkes unter Einschränkung seiner Zuverlässigkeit, formuliert und gelöst.

2. Systemzuverlässigkeit

Die Zuverlässigkeit eines Tragwerkes, das in dieser Arbeit beispielsweise im zuverlässigkeitstheoretischen Sinne als ein Seriensystem betrachtet wird, definiert man als Wahrscheinlichkeit

$$P_{suc}(\mathbf{EX}) = 1 - P_{fail}(\mathbf{EX}) = Prob \left[\bigcup_{j=1}^m (g_j(\mathbf{X}) \leq 0) \mid \mathbf{EX} \right] = \int_{\mathbf{R}^n} I_f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{EX}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

des Nicht-Versagens des Tragwerkes, wobei $P_{fail}(\cdot)$ die Versagenswahrscheinlichkeit des Tragwerkes bzw. System-Versagenswahrscheinlichkeit,

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \quad (2)$$

der Vektor der Zufallsvariablen bzw. Basisvariablen,

$$\mathbf{EX} = (\mathbf{EX}_1, \dots, \mathbf{EX}_n)^T \quad (3)$$

der Vektor der konstruktiven Variablen bzw. Bemessungsvariablen (Erwartungswertvektor von \mathbf{X}),

$$I_f(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - I_{f_j}(\mathbf{x})) \quad (4)$$

die System Indikatorvariable,

$$I_{f_j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \\ 0 & \text{falls } g_j(\mathbf{x}) > 0, \end{cases} \quad (5)$$

die Element-Indikatorvariable, $f_{\mathbf{x}}(\cdot)$ die Verteilungsdichte von \mathbf{X} und $g_j(\cdot)$ die Funktion des j -ten Grenzzustandes ist [1,2].

Die System-Versagenswahrscheinlichkeit $P_{fail}(\cdot)$ wird mit Hilfe der *Monte-Carlo-Methode* durch die Versagenshäufigkeit P_{fe} abgeschätzt, nämlich durch

$$P_{fe} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k I_f(X_j), \quad (6)$$

wobei k die Anzahl der Versuche von \mathbf{X} und X_j die j -te zufällige Realisierung des Vektors der Zufallsvariablen ist.

3. Aufgabenstellungen

Das klassische zuverlässigkeitstheoretische Optimierungsproblem ist das Problem der bedingten Minimierung von Baukosten oder Gewicht eines Tragwerkes [3]. Die Baukosten oder Gewicht sind im

allgemeinen zufällig, weil sie von zufälligen Parametern, z.B. Abmessungen, des Tragwerkes abhängen. Eine Kennziffer $w(\cdot)$ für zufällige Baukosten oder zufälliges Gewicht läßt sich dann als eine Funktion der Zufallsvariablen ausdrücken, d.h. $w(\cdot)$ ist eine explizite Funktion $w(X)$ der Zufallsvariablen X_i .

Der von den Bemessungsvariablen EX_i abhängende Erwartungswert $Ew(X)$ bedeutet zu erwartende Baukosten oder zu erwartendes Gewicht einer Realisierung des Tragwerkes, und er kann für Zielfunktion

$$W(EX) = E(w(X) | EX) \quad (7)$$

des klassischen zuverlässigkeitstheoretischen Optimierungsproblems angenommen werden. In diesem Fall läßt sich das Optimierungsproblem in Form einer Standardaufgabe der stochastischen Programmierung darstellen:

$$W(EX) = E(w(X) | EX) = \int_{R^n} w(x) f_x(EX, x) dx \rightarrow \min! \quad (8a)$$

$$P_{fail}(EX) = E(I_f(X) | EX) = \int_{R^n} I_f(x) f_x(EX, x) dx \leq P_{fail,a}, \quad (8b)$$

$$EX \in D \subset R^n. \quad (8c)$$

Hierin sind:

$P_{fail,a}$: die vorgeschriebene zulässige Versagenswahrscheinlichkeit und

D : die abgeschlossene Teilmenge von R^n (in der Regel vom einfachen Charakter oder sogar $D := R^n$).

Zwei Verallgemeinerungen der Optimierungsaufgabe (8) sind vom praktischen Gesichtspunkt aus zweckmäßig:

1. Verallgemeinerung auf den Fall unterschiedlicher Dimensionen der Vektoren der Zufalls- und Bemessungsvariablen.
2. Verallgemeinerung auf einen zeitabhängigen Fall.

In der Optimierungsaufgabe (8) sind Dimensionen der Vektoren der Zufalls- und Bemessungsvariablen gleich, d.h. $X \in R^n$ und $EX \in R^n$. Im allgemeineren Fall ist die Dimension l des Vektors EX' der Bemessungsvariablen kleiner als n :

$$EX' = (EX_1, \dots, EX_l)^T \text{ für } l \leq n. \quad (9)$$

Die erste Verallgemeinerung der Optimierungsaufgabe (8) ergibt sich durch eine Ersetzung in ihrer Formulierung des Vektors EX durch den Vektor EX' , und zwar

$$W(EX') = E(w(X) | EX') = \int_{R^n} w(x) f_x(EX', x) dx \rightarrow \min! \quad (10a)$$

$$P_{fail}(EX') = E(I_f(X) | EX') = \int_{R^n} I_f(x) f_x(EX', x) dx \leq P_{fail,a}, \quad (10b)$$

$$EX' \in D \subset R^l. \quad (10c)$$

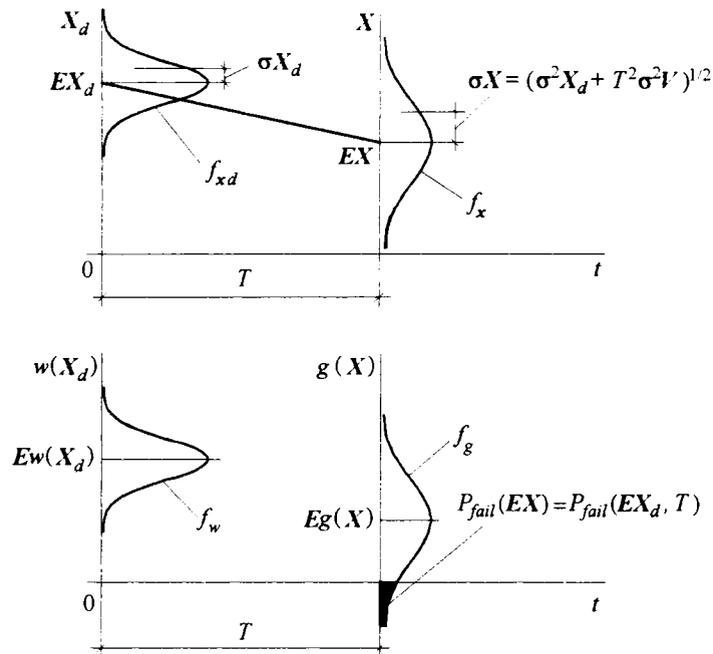


Bild 1. Betrachtung der Zielfunktion $Ew(\cdot)$ und der Funktion $P_{fail}(\cdot)$ der Nebenbedingung in unterschiedlichen Zeitpunkten

In der Aufgabe (8) wird der zeitunabhängige Fall betrachtet, weil die Zufallsvariablen X_i zeitlich nicht ändern. Die Zielfunktion $W(\mathbf{EX}')$ und die System-Versagenswahrscheinlichkeit $P_{fail}(\mathbf{EX}')$ beziehen sich dadurch auf einen gegebenen Zeitpunkt t . Die Wahrscheinlichkeit $P_{fail}(\mathbf{EX}')$ wird in diesem Fall als Augenblickswahrscheinlichkeit bezeichnet [4]. Als einfachste Verallgemeinerung des zeitunabhängigen Falles auf einen zeitabhängigen läßt sich die sogenannte quasilineare Verteilung [4]

$$X = X_d - tV \quad (11)$$

des Vektors X betrachten, in der durch die Zufallsvektoren

$$X_d = (X_{d1}, \dots, X_{dn})^T \quad (12)$$

und

$$V = (V_1, \dots, V_n)^T \quad (13)$$

Verteilung der Zufallsvariablen im Zeitpunkt $t = 0$ und Geschwindigkeit ihrer monotonen Veränderung modelliert wird. Durch das quasilineare Gesetz (11) läßt sich eine durch den aggressiven Umwelteinfluß hervorgerufene allmähliche Verschlechterung physischer und mechanischer Charakteristiken von den Tragwerken modellieren, auf die langzeitige und sich monoton verändernde Lasten wirken [4].

Die quasilineare Verteilung (11) von X läßt Optimierungsaufgaben formulieren, in den Zielfunktion $W(\cdot)$ im Zeitpunkt $t = 0$ minimiert wird, während die System-Versagenswahrscheinlichkeit $P_{fail}(\mathbf{EX}')$ im Zeitpunkt $t = T \neq 0$ eingeschränkt wird (vgl. Bild 1). So kann man, z.B., unter der Annahme, daß

$Cov(X_i, V_j) = 0$ für $i, j = 1, \dots, n$ ist, in der Optimierungsaufgabe (10) die Funktionen $W(\mathbf{EX})$ und $P_{fail}(\mathbf{EX})$ durch die Funktionen

$$W(\mathbf{EX}'_d) = \mathbf{E}(w(X_d) | \mathbf{EX}'_d) = \int_{\mathbb{R}^n} w(\mathbf{x}) f_{x_d}(\mathbf{EX}'_d, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (14)$$

und

$$\begin{aligned} P_{fail}(\mathbf{EX}'_d, T) &= \mathbf{E}(I_f(X_d - TV) | \mathbf{EX}'_d) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} I_f(\mathbf{x} - T\mathbf{v}) f_{x_d}(\mathbf{EX}'_d, \mathbf{x}) f_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (15)$$

ersetzen, wobei

$$\mathbf{EX}'_d = (\mathbf{EX}_{d1}, \dots, \mathbf{EX}_{dl})^T \text{ für } l \leq n \quad (16)$$

der Vektor der Bemessungsvariablen und $f_{x_d}(\cdot)$, $f_{\mathbf{v}}(\cdot)$ die n -dimensionalen Verteilungsdichten der Zufallsvektoren X_d und V sind. In der Optimierungsaufgabe

$$W(\mathbf{EX}'_d) \rightarrow \min! \quad (17a)$$

$$P_{fail}(\mathbf{EX}'_d, T) \leq P_{fail,a}, \quad (17b)$$

$$\mathbf{EX}' \in D \subset \mathbb{R}^l \quad (17c)$$

werden dann Baukosten eines Tragwerkes, die sich an den Anfang seiner Nutzung beziehen, unter Einschränkung seiner System-Versagenswahrscheinlichkeit am Ende seiner vorgeschriebenen Nutzungsdauer T minimiert. Die Optimierungsaufgabe (17) ist die zweite der obenerwähnten Verallgemeinerungen der Optimierungsaufgabe (8).

4. Optimierungsverfahren

Einige Optimierungsverfahren schlägt man in mathematischer Literatur für die Lösung der Aufgaben (8), (10) und (17) vor [5,6]. Ein von ihnen heißt Verfahren der *Lagrange-Multiplikatoren* (*Lagrange Multiplier Method*) und gründet sich auf das klassische Schema der nichtlinearen Programmierung: primäre Optimierungsaufgabe wird mit Hilfe einer *Lagrange-Funktion* auf eine einfachere Aufgabe der Suche nach einem der Sattelpunkte der *Lagrange-Funktion* zurückgeführt. Dabei werden für solche Suche notwendige Gradienten der *Lagrange-Funktion* durch ihre statistischen Analoga - stochastische Quasigradienten - ersetzt. Mathematische Probleme dieses Ansatzes werden im folgenden aufgrund der Aufgabe (8) besprochen. Die Aufgaben (10) und (17) werden bei der Lösung von Beispielaufgaben betrachtet.

Die *Lagrange-Funktion* hat im Falle der Optimierungsaufgabe (8) die folgende Form:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{EX}, u) &= W(\mathbf{EX}) + u(P_{fail}(\mathbf{EX}) - P_{fail,a}) = \\ &= \mathbf{E}(w(X) + u(I_f(X) - P_{fail,a}) | \mathbf{EX}) = \\ &= \mathbf{E}(l(X, u) | \mathbf{EX}). \end{aligned} \quad (18)$$

Die Lösung der Aufgabe (8) besteht in der Bestimmung eines der Sattelpunkte (EX^*, u^*) der Lagrange-Funktion $L(EX, u)$ nach Gl.(18) bezüglich der Menge D nach Definition (8c) und der Menge $D_u := \{u \in \mathbb{R}^1 \mid u \geq 0\}$. Die erste Komponente EX^* des Sattelpunktes (EX^*, u^*) gehört immer zur Lösungsmenge der Aufgabe (8) [5,6].

Zur Bestimmung der Sattelpunkte (EX^*, u^*) von $L(EX, u)$ dient die Prozedur

$$\left. \begin{aligned} EX_{k+1} &= \pi_D(EX_k - \rho_k \gamma_k \zeta_k), \\ u_{k+1} &= \max(0; u_k + \rho_k \vartheta_k) \end{aligned} \right\} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren mit dem Normierungsfaktor

$$\gamma_k = \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k l(X_j, u_j) \right)^{-1}. \quad (20)$$

Hierin sind:

EX_0, u_0 : die beliebigen Anfangsnäherungen von Komponenten des Sattelpunktes (EX^*, u^*) der Lagrange-Funktion $L(EX, u)$

$\pi_D(\cdot)$: die Operation der Projektion in die Menge D , d.h.

$$\pi_D(y) = \operatorname{argmin} \{ \|y - EX\|^2 \mid EX \in D \},$$

ρ_k : die Schrittweite und

ζ_k, ϑ_k : die Suchrichtungen.

Der Vektor ζ_k und der Skalar ϑ_k werden in der Prozedur (19) so gewählt, daß sie die Gleichungen

$$E(\zeta_k \mid (EX_k, u_k)) = \nabla_{EX} L(EX_k, u_k) + v_k \quad (21)$$

und

$$E(\vartheta_k \mid EX_k) = \nabla_u L(EX_k) \quad (22)$$

erfüllen, wobei v_k ein Zufallsvektor, dessen Norm $\|v_k\|$ dem Null nähert, als k wächst, ist. Der Vektor ζ_k und der Skalar ϑ_k werden in der Theorie der stochastischen Programmierung als stochastische Quasi-gradient und stochastische Gradient bezeichnet [5,6].

Eine erfolgreiche praktische Anwendung der Prozedur (19) stößt auf drei Probleme:

1. Die Wahl der Schrittweite ρ_k .
2. Die Wahl der Suchrichtungen ζ_k und ϑ_k .
3. Die Wahl von Stoppregeln zum Abbruch der Suche gemäß der Prozedur (19).

Die Wahl der Schrittweite ρ_k , die Bedingungen der Konvergenz der Folge $\{(EX_k, u_k)\}$ gegen (EX^*, u^*) erfüllt, wird in mathematischer Literatur als programmierte Wahl bezeichnet und besteht in einer Annahme der Folge $\{\rho_k\}$ als einer Folge von deterministischen Konstanten vor dem Starten des Iterationsprozesses (19) [7-9]. In dieser Arbeit beschränkt man sich auf die Wahl

$$\rho_k = \min \left(\Delta_1; \frac{\Delta_2}{k+1} \right) \text{ für } \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \quad (23)$$

obwohl es Alternativen gibt, und eine optimale Wahl von ρ_k als ein spezielles mathematisches Untersuchungsfeld bezeichnet wird [8].

Als übliche Suchrichtung ζ_k dienen in Verfahren der stochastischen Quasigradienten die *Blumsche* und *Sacksche* Differenzenformeln, die vom rechnerischen Gesichtspunkt aus besonders aufwendig sind, und außerdem nur für die Lösung von Spezialfällen der gestellten Optimierungsaufgaben passen [5,6,8]. Man kann auch als Suchrichtung ζ_k den Ausdruck

$$\zeta_k = l(\mathbf{X}_k, u_k) \nabla_{EX} \ln f_x(\mathbf{EX}_k, \mathbf{X}_k), \quad (24)$$

der die Bedingung (21) erfüllt und für den $\|\mathbf{v}_k\| \equiv 0$ ist, verwenden. Die Formel (24) gründet sich auf einen seit 60en Jahre bekannten Ausdruck, der im Falle der *Lagrange*-Funktion $L(\mathbf{EX}, u)$ die folgende Form hat [10]:

$$\frac{\partial L(\mathbf{EX}, u)}{\partial EX_i} = \frac{\partial}{\partial EX_i} \int_{R^n} l(\mathbf{x}, u) f_x(\mathbf{EX}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = E \left(l(\mathbf{X}, u) \frac{\partial \ln f_x(\mathbf{EX}, \mathbf{X})}{\partial EX_i} \right). \quad (25)$$

Als Suchrichtung ϑ_k wird in dieser Arbeit anstatt der in mathematischer Literatur vorgeschlagenen Differenz $I_f(\mathbf{X}_k) - P_{fail,a}$ der folgende Ausdruck genutzt [11]:

$$\vartheta_k = I_f(\mathbf{X}_k) - P_{fail,a} + P_{ub,k} - P_{fe,k}. \quad (26)$$

Darin ist $P_{ub,k}$ die obere Grenze eines für den Wert $P_{fail}(\mathbf{EX}_k)$ gemäß den *Clopperschen-Pearson*schen Gleichungen [12] berechneten Konfidenzintervalls.

Was die Stoppregeln zum Abbruch der Suche, die gemäß der Prozedur (19) geführt wird, anbetrifft, sind im folgenden einige vorgeschlagen (vgl. Abschnitt 5.3).

5. Optimierung eines schlaff bewehrten Stahlbetonbalkens

5.1. Vorbemerkungen

Gegeben ist ein frei aufliegender schlaff bewehrter Stahlbetonbalken mit Rechteckquerschnitt und von 6 m Spannweite nach Bild 2, der mit zwei gleichmäßig verteilten Lasten belastet ist. Die Berechnung des Balkens wird zur Gewährleistung seiner Tragfähigkeit geführt. Man nimmt dabei an, daß ein Verlust der Tragfähigkeit des Balkens eintritt, wenn eine der folgenden Brucharten erfolgt:

1. Biegezugbruch im Schnitt 1 bei einer schwachen Bewehrung der Biegezugzone.
2. Biegedruckbruch im Schnitt 1 bei einer starken Bewehrung der Biegezugzone.
3. Querkraftbruch im Schnitt 2.

Die Tragfähigkeit wird gewährleistet, wenn in keinem von den beiden Schnitten der Grenzzustand des Bruches nicht überschritten wird, nämlich

$$g_1(\mathbf{x}) = R_1(\mathbf{x}) - S_1(\mathbf{x}) > 0 \quad (27)$$

und

$$g_2(\mathbf{x}) = R_2(\mathbf{x}) - S_2(\mathbf{x}) > 0. \quad (28)$$

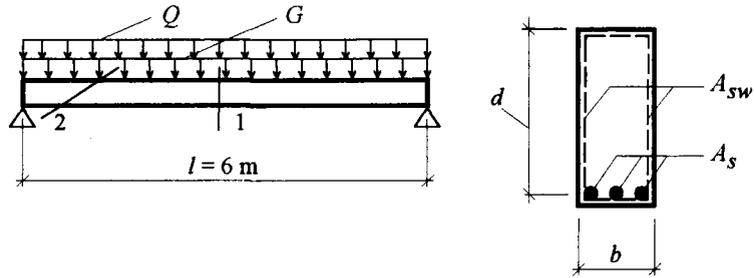


Bild 2. Statisches System, Belastung und Bewehrung im Querschnitt des schlaff bewehrten Balkens

Hierin sind:

- $R_1(\cdot)$: der Bruchwiderstand im Schnitt 1
- $S_1(\cdot)$: die Beanspruchung im Schnitt 1
- $R_2(\cdot)$: der Bruchwiderstand im Schnitt 2 und
- $S_2(\cdot)$: die Beanspruchung im Schnitt 2.

Der Vektor X der Zufallsvariablen, die in Bild 2 teilweise dargestellt und in Tabelle 1 aufgezählt sind, besteht in diesem Beispiel aus 11 Komponenten. Zwei Fälle werden betrachtet:

1. Alle Zufallsvariablen X_i sind zeitlich unveränderlich.
2. Die Zufallsvariablen X_1, X_8 und X_9 , die Querschnittsfläche A_s der Längsbewehrung, Betondruckfestigkeit f_{cc} und Betonzugfestigkeit f_{ct} bezeichnen, verändern sich zeitlich infolge der Bewehrungskorrosion und Betondestruktion. Übrige Zufallsvariablen sind zeitlich unveränderlich.

Tabelle 1 Parameter der Verteilungen der Zufallsvariablen X_i

i	Zufallsvariable	Bezeichnung	Mittelwert	Var.-koeff.	Verteilungstyp
1	Querschnittsfläche der Längsbewehrung	A_s	variabel	0,03	NV *
2	Querschnittsfläche der Querbewehrung	A_{sw}	$0,565 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	0,03	NV
3	Balkennutzhöhe	d	variabel	0,035	NV
4	Balkenbreite	b	0,3 m	0,03	NV
5	Bügelabstand	s	0,2 m	0,25	NV
6	Fließgrenze der Längsbewehrung	f_y	460 MPa	0,093	NV
7	Fließgrenze der Querbewehrung	f_{yw}	331 MPa	0,093	NV
8	Betondruckfestigkeit	f_{cc}^{***}	14,5 MPa	0,135	NV
9	Betonzugfestigkeit	f_{ct}	3,6 MPa	0,25	NV
10	Intensität der Dauerbelastung	G	$33,1 \cdot 10^{-3} \text{ MN/m}$	0,05	NV
11	Intensität der Verkehrsbelastung	Q	$14,4 \cdot 10^{-3} \text{ MN/m}$	0,25	LNV **

*Normalverteilung

**logarithmische Normalverteilung

***Korrelationskoeffizient $\rho(f_{cc}, f_{ct})$ ist gleich 0,8

Verteilungstypen und -parameter der Zufallsvariablen X_i sind für den ersten Fall in Tabelle 1 zusammengestellt. Im zweiten Fall wird die Zeitabhängigkeit des Vektors X mit Hilfe des quasilinearen Gesetzes (11) unter der Annahme, daß $V_i \neq 0$ für $i = 1, 8, 9$ und $V_i = 0$ anderenfalls ist, modelliert. Die in Tabelle 1 angeführten Verteilungstypen und -parameter beziehen sich im zweiten Fall auf den Vektor X_d . Bezüglich der Geschwindigkeiten V_1, V_8 und V_9 wird das folgende angenommen: $V_i \sim N(EV_i, EV_i \times \delta_{v_i})$, $Cov(V_i, V_j) = 0$, $EV_i = 0,004EX_{i,d}$, $\delta_{v_i} = 5\%$ für $i, j = 1, 8, 9$ und $i \neq j$. Analytische und algorithmische Ausdrücke der Widerstände $R_1(\cdot)$ und $R_2(\cdot)$ sowie der Beanspruchungen $S_1(\cdot)$ und $S_2(\cdot)$ sind in den Arbeiten [4,13] gegeben.

Als Zielfunktion wird im ersten Fall der Erwartungswert

$$Ew(X) = Ew(d, b, A_s) = E(l(db\xi_b + A_s\xi_s)) \quad (29)$$

des nach Kosten in der Konstruktion (*in-place cost*) reduzierten Volumens des Stahlbetons verwendet (vgl. [13]; Abschnitt 11.1), wobei l die Balkenlänge und ξ_b, ξ_s die Reduktionsbeiwerte sind. Die dimensionslosen Reduktionsbeiwerte ξ_b und ξ_s sind Verhältnisse von Kosten in der Konstruktion des Betons und der Längsbewehrung des Balkens zu Kosten in der Konstruktion des Betons der Gütenklasse B15. In diesem Beispiel sind die Werte $\xi_b = 1,1$ und $\xi_s = 50$ angenommen (vgl. Tabelle 11.1 in [13]). Für Bemessungsvariablen werden im ersten Fall die Erwartungswerte Ed und EA_s der Balkennutzhöhe und Querschnittsfläche der Längsbewehrung angenommen:

$$EX' = (EX_1, EX_2)^T = (Ed, EA_s)^T. \quad (30)$$

Im zweiten Fall wird als Zielfunktion der Wert

$$Ew(X_d) = Ew(d, b, A_{s,d}) \quad (31)$$

der Funktion (29) betrachtet, wobei $A_{s,d}$ die zufällige Querschnittsfläche der Längsbewehrung am Anfang der Nutzung des Balkens ist. Der Vektor der Bemessungsvariablen lautet:

$$EX'_d = (EX_{1,d}, EX_{2,d})^T = (Ed, EA_{s,d})^T. \quad (32)$$

5.2. Aufgabenstellungen

Gesucht sind die Werte der Bemessungsvariablen Ed, EA_s und $EA_{s,d}$ bei denen die Zielfunktionen (29) und (31) ihre Minimalwerte unter Einhaltung der Nebenbedingung annehmen, die darin besteht, daß der Balken seine Tragfähigkeit mit der Wahrscheinlichkeit P_{fail} kleiner oder gleich ihrem zulässigen Wert $P_{fail,a}$ höchstens verlieren darf. Mathematische Formulierungen der Optimierungsaufgaben lauten folgendermaßen:

$$W(EX') = E(w(X) | EX') \rightarrow \min! \quad (33a)$$

$$P_{fail}(\mathbf{EX}') = Prob \left[\bigcup_{j=1}^2 (g_j(\mathbf{X}) \leq 0) \mid \mathbf{EX}' \right] \leq P_{fail,a} \quad (33b)$$

und

$$W(\mathbf{EX}'_d) = \mathbf{E}(w(\mathbf{X}_d) \mid \mathbf{EX}'_d) \rightarrow \min! \quad (34a)$$

$$P_{fail}(\mathbf{EX}'_d, T) = Prob \left[\bigcup_{j=1}^2 (g_j(\mathbf{X}_d - T\mathbf{V}) \leq 0) \mid \mathbf{EX}'_d \right] \leq P_{fail,a}. \quad (34b)$$

5.3. Optimierungsdurchführung

Zur Lösung der Optimierungsaufgaben (33) und (34) wurden ihnen die *Lagrange-Funktionen*

$$\begin{aligned} L(\mathbf{EX}', u) &= W(\mathbf{EX}') + u(P_{fail}(\mathbf{EX}') - P_{fail,a}) = \\ &= \mathbf{E}(w(\mathbf{X}) + u(I_f(\mathbf{X}) - P_{fail,a}) \mid \mathbf{EX}') = \\ &= \mathbf{E}(l(\mathbf{X}, u) \mid \mathbf{EX}') \end{aligned} \quad (35)$$

und

$$\begin{aligned} L(\mathbf{EX}'_d, u) &= W(\mathbf{EX}'_d) + u(P_{fail}(\mathbf{EX}'_d, T) - P_{fail,a}) = \\ &= \mathbf{E}(w(\mathbf{X}_d) + u(I_f(\mathbf{X}_d - T\mathbf{V}) - P_{fail,a}) \mid \mathbf{EX}'_d) = \\ &= \mathbf{E}(l(\mathbf{X}_d, T, \mathbf{V}, u) \mid \mathbf{EX}'_d) \end{aligned} \quad (36)$$

zugeordnet. Für die Suche nach Elementen der Mengen der Sattelpunkte (\mathbf{EX}'^*, u^*) und $(\mathbf{EX}'_{d^*}, u^*)$ von $L(\mathbf{EX}', u)$ und $L(\mathbf{EX}'_d, u)$ wurde die Prozedur

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{EX}'_{k+1} &= \mathbf{EX}'_k - \rho_k \gamma_k \zeta_k, \\ u_{k+1} &= \max(0; u_k + \rho_k \vartheta_k) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

für $k = 0, 1, 2, \dots$

mit

$$\begin{aligned} \zeta_k &= l(\mathbf{X}_k, u_k) \times \\ &\times \left(\text{diag} \left(\frac{X_{1k}}{\mathbf{EX}'_{1k} \sigma^2 X_{1k}}, \frac{X_{2k}}{\mathbf{EX}'_{2k} \sigma^2 X_{2k}} \right) (\mathbf{X}'_k - \mathbf{EX}'_k) - \left(\frac{1}{\mathbf{EX}'_{1k}}, \frac{1}{\mathbf{EX}'_{2k}} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (38)$$

und die Prozedur

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{EX}'_{d,k+1} &= \mathbf{EX}'_{dk} - \rho_k \gamma_k \zeta_k, \\ u_{k+1} &= \max(0; u_k + \rho_k \vartheta_k) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

für $k = 0, 1, 2, \dots$

mit

$$\begin{aligned} \zeta_k &= l(\mathbf{X}_{dk}, T, \mathbf{V}_k, u_k) \times \\ &\times \left(\text{diag} \left(\frac{X_{1k}}{\mathbf{EX}'_{1k} \sigma^2 X_{1k}}, \frac{X_{2k}}{\mathbf{EX}'_{2k} \sigma^2 X_{2k}} \right) (\mathbf{X}'_k - \mathbf{EX}'_k) - \left(\frac{1}{\mathbf{EX}'_{1k}}, \frac{1}{\mathbf{EX}'_{2k}} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (40)$$

und ϑ_k nach Gl.(26) verwendet, wobei die obere Konfidenzgrenze $P_{ub,k}$ in Gl.(26) für die Werte $P_{fail}(\mathbf{EX}'_k)$ bzw. $P_{fail}(\mathbf{EX}'_{dk}, T)$ berechnet wird. Die Prozeduren (37) und (39) sind für die Lösung der

Optimierungsaufgaben (33) und (34) angepaßte Spezialfälle der Prozedur (19) des Verfahrens der *Lagrange*-Multiplikatoren.

Eingabedaten, die für die Berechnung mit der Prozedur (37) bei der Lösung der Optimierungsaufgabe (33) verwendet wurden, sind in der Tabelle 2 zusammengestellt. Die Optimierungsaufgabe (34) wurde mit Hilfe der Prozedur (39) bei der vorgeschriebenen Bruchsicherheit $P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a} = 0,99$ für den 0, 10, 20, 30, 40 und 50-jährigen Nutzungsdauer T gelöst. Weitere für die Berechnung mit der Prozedur (39) verwendete Eingabedaten sind in der Tabelle 3 angeführt. Als Anfangsnäherung u_0 des Wertes u^* wurde stets 0 angenommen.

Tabelle 2 Eingabedaten zur Lösung der Optimierungsaufgabe (33)

$P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a}$	Komponenten von EX'_0		Parameter von ρ_k	
	$EX_{1,0} (Ed_0, m)$	$EX_{2,0} (EA_s, m^2)$	Δ_1	Δ_2
0,999	0,55	$24,63 \cdot 10^{-4}$	0,4	2
0,995	0,55	$24,63 \cdot 10^{-4}$	0,4	20
0,99	0,55	$24,63 \cdot 10^{-4}$	0,4	30
0,98	0,55	$24,63 \cdot 10^{-4}$	0,4	80
0,97	0,55	$24,63 \cdot 10^{-4}$	0,4	160

Tabelle 3 Eingabedaten zur Lösung der Optimierungsaufgabe (34)

T, Jahr	Komponenten von EX'_{d0}		Parameter von ρ_k	
	$EX_{1d,0} (Ed_0, m)$	$EX_{2d,0} (EA_{sd}, m^2)$	Δ_1	Δ_2
0	0,55	$30,54 \cdot 10^{-4}$	0,4	120
10	0,55	$30,54 \cdot 10^{-4}$	0,4	80
20	0,55	$30,54 \cdot 10^{-4}$	0,4	40
30	0,55	$30,54 \cdot 10^{-4}$	0,4	20
40	0,55	$30,54 \cdot 10^{-4}$	0,4	10
50	0,55	$30,54 \cdot 10^{-4}$	0,4	2

Die Vorgabe der relativ niedrigen vorgeschriebenen zulässigen System-Überlebenswahrscheinlichkeiten $P_{suc,a} = 0,97 \dots 0,999$ ($P_{fail,a} = 0,001 \dots 0,03$) bei der Lösung der Optimierungsaufgaben (33) und (34) erklärt sich dadurch, daß die Abschätzung in jedem Punkt EX'_k und EX'_{dk} der in den Nebenbedingungen (33b) und (34b) eingeschränkten System-Versagenswahrscheinlichkeiten $P_{fail}(EX) = 1 - P_{suc}(EX)$ und $P_{fail}(EX'_{d}, T) = 1 - P_{suc}(EX'_{d}, T)$ anhand der einfachen *Monte-Carlo*-Methode durchgeführt wird. Diese Methode ermöglicht eine Abschätzung von $P_{fail}(\cdot)$ mit einer annehmbaren Konfidenz und bei einer relativ niedrigen verfügbaren Versuchsanzahl $k + 1 \leq (0,5 \dots 1) \cdot 10^4$ nur in einem Teil des für die Entwurfspraxis von schlaff bewehrten biegebeanspruchten Stahlbetonbalken charakteristischen Intervalls $P_{fail}(\cdot) = 10^{-10} \dots 0,25$ (im Durchschnitt $P_{fail}(\cdot) = 10^{-4}$, Angaben von Kudzys [4]). Eine Notwendigkeit, die Optimierungsaufgaben (33) und (34) mittels einer relativ kleinen Iterationsanzahl $k + 1$ bei $P_{suc,a} > 0,999 \dots 0,9999$ zu lösen, würde eine Integration in das Verfahren der *Lagrange*-Multiplikatoren einer der Methoden zur Verminderung der Varianz der

Schätzung (6), z.B. des Simulationsverfahrens mit "importance sampling" [14], erfordern. Solche Integration steht jedoch außer Ziele der vorliegenden Arbeit.

Die Wahl konkreter Werte der Parameter Δ_1 und Δ_2 der durch Gl.(23) definierten Schrittweite ρ_k beeinflusst die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit der Prozeduren (37) und (39). Leider muß man sagen, daß es keine mathematisch formalisierte Überlegungen gibt, aus den folgt, welche Wahl von Δ_1 und Δ_2 bessere oder sogar die beste ist. Die in den Tabellen 2 und 3 angeführten Werte von Δ_1 und Δ_2 wurden auf Grund der Optimierungserfahrung gewählt und gewährleiten die Konvergenz der Prozeduren (37) und (39) nur in den betrachteten konkreten Fällen.

Die Suche nach den Sattelpunkten (EX'^*, u^*) und (EX'_{δ}, u^*) von $l(EX', u)$ und $l(EX'_{\delta}, u)$ gemäß den Prozeduren (37) und (39) wurde bei jeder Optimierung in den Anfangspunkten $(EX'_0, 0)$ und $(EX'_{\delta 0}, 0)$ angefangen, wobei die Anfangsnäherungen EX'_0 und $EX'_{\delta 0}$ von EX'^* und EX'_{δ} in den Tabellen 2 und 3 vorgegeben sind, und in der Iteration τ abgebrochen, in der Ungleichungen in den folgenden Stoppregeln erstmals im Verlaufe der Optimierung gleichzeitig erfüllt worden waren [11]:

1. Stopregel (statistische Gleichstellung mit Null des Gradienten der Lagrange-Funktion)

$$\tau = \inf \left(k \mid \frac{T_k^2(k+1-l)}{kl} \leq F_{(l, k+1-l); 1-\alpha} \right) \quad (41)$$

mit

$$T_k^2 = (k+1)(\zeta_{mk} - \mathbf{0})^T \Sigma_{mk}^{-1} (\zeta_{mk} - \mathbf{0}) = (k+1) \zeta_{mk}^T \Sigma_{mk}^{-1} \zeta_{mk} \quad (42)$$

$$\zeta_{mk} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \zeta_j \quad (43)$$

und

$$\Sigma_{mk} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k (\zeta_i - \zeta_{mk})(\zeta_i - \zeta_{mk})^T \quad (44)$$

2. Stopregel (Einschränkung des Schätzungsfehlers der Zielfunktion)

$$\tau = \inf \left(k \mid \frac{w_{ub,k} - w_{lb,k}}{w_{mk}} \leq \varepsilon \right) \quad (45)$$

mit

$$w_{ub,k} = w_{mk} + z_{1-\alpha/2} \frac{s w_k}{\sqrt{k}} \quad (46)$$

$$w_{lb,k} = w_{mk} - z_{1-\alpha/2} \frac{s w_k}{\sqrt{k}} \quad (47)$$

$$w_{mk} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k w(X_j) \quad (48)$$

und

$$s^2 w_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k (w(X_j) - w_{mk})^2 \quad (49)$$

3. Stopregel (statistische Überprüfung der Nebenbedingung)

$$\tau = \inf (k \mid P_{ub,k} \leq P_{f(\alpha)}) \quad (50)$$

Hierin sind:

- $F_{(l,k+1-l);1-\alpha}$ das Quantil der Ordnung $1 - \alpha$ einer F -Verteilung mit $(l, k + 1 - l)$ Freiheitsgraden
 $z_{1-\alpha/2}$ das Quantil der Ordnung $1 - \alpha/2$ der standardisierten Normalverteilung und
 ε die positive Zahl.

Das Quantil $F_{(l,k+1-l);1-\alpha}$ in der Stopppregel (41) und das Quantil $z_{1-\alpha/2}$ in den Ausdrücken (46) und (47) sowie die obere Konfidenzgrenze $P_{ub,k}$ in der Stopppregel (50) wurden im Verlaufe der Optimierungen für das Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ berechnet. In der Stopppregel (45) wurde außerdem $\varepsilon = 0,01$ festgelegt.

Zur Veranschaulichung einer von den durchgeführten Optimierungen, und zwar der Minimierung von $W(EX')$ bei der vorgeschriebenen zulässigen Überlebenswahrscheinlichkeit $P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a} = 0,99$ (vgl. Tabelle 2), werden in den Bildern 3 bis 5 die folgenden in Form von ununterbrochenen Funktionen der Iterationsnummer k vorgestellten Folgen dargestellt:

1. Die Folgen $\{Ed_k, k = 0, 25, 50, \dots, 850, 874\}$ und $\{EA_{sk}, k = 0, 25, 50, \dots, 850, 874\}$, wobei $\tau = 874$ die Nummer der Stopppiteration ist (vgl. Bild 3).
2. Die Folge $\{w_{mk}, k = 0, 25, 50, \dots, 850, 874\}$, deren Elemente die Mittelwerte (48) sind (vgl. Bild 4).
3. Die Folge $\{l_{mk}, k = 0, 25, 50, \dots, 850, 874\}$, deren Elemente die Mittelwerte $\left(\sum_{j=0}^k l(X_j, u_j)\right)/(k + 1)$ sind (vgl. Bild 4).
4. Die Folgen $\{1 - P_{fe,k}, k = 50, 75, \dots, 850, 874\}$, $\{1 - P_{lb,k}, k = 50, 75, \dots, 850, 874\}$ und $\{1 - P_{ub,k}, k = 50, 75, \dots, 850, 874\}$, wobei $P_{fe,k}$, $P_{lb,k}$ und $P_{ub,k}$ die nach Gl.(6) definierte statistische Schätzung der System-Versagenswahrscheinlichkeit $P_{fail}(EX'_k)$ und die untere und obere Konfidenzgrenze für $P_{fail}(EX'_k)$ ist. $P_{lb,k}$ und $P_{ub,k}$ wurden gemäß den Clopperschen-Pearsonschen Gleichungen [12] bei Versuchsanzahl $k + 1$ und $\alpha = 0,05$ berechnet (vgl. Bild 5).

5.4. Optimierungsergebnisse

Ergebnisse der Lösung der Optimierungsaufgaben (33) und (34) bei verschiedenen Werten von $P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a}$ und T sind in den Tabellen 4 und 5 zusammengefaßt. Die Gesamtheit dieser Ergebnisse sind Werte, die in der Stopppiteration τ aufgrund der während des ganzen Iterationsprozesses akkumulierten Information errechnet werden, und die sich in zwei Gruppen einteilen lassen. Zur ersten Gruppe gehören die klassischen Lösungsergebnisse einer Optimierungsaufgabe:

1. Die optimalen Werte Ed_τ , $EA_{s\tau}$, und $EA_{s,d\tau}$ der Bemessungsvariablen, d.h. Komponenten der Vektoren EX'_τ und $EX'_{d\tau}$ (vgl. Tabellen 4-a und 5-a).
2. Die statistischen Schätzungen $w_{m\tau}$ nach Gl.(48) der Minimalwerte $W(EX'_\tau)$ und $W(EX'_{d\tau})$ der Zielfunktionen (29) und (31) (vgl. Tabellen 4-b und 5-b).

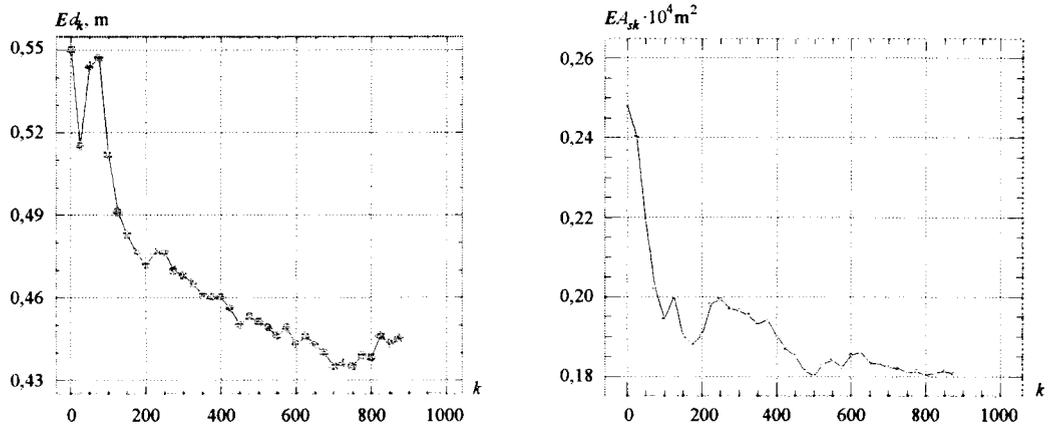


Bild 3. Variation der Bemessungsvariablen Ed und EA_s

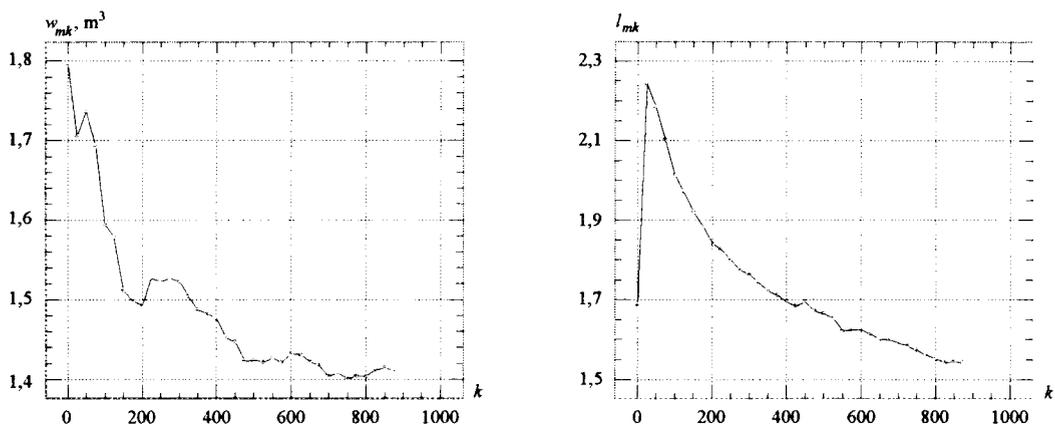


Bild 4. Variation der statistischen Schätzung w_{mk} der Werte $W(EX'_k)$ der Zielfunktion und der statistischen Schätzung $l_{mk} = \left(\sum_{j=0}^k l(X_j, u_j) \right) / (k + 1)$ der Werte $L(EX'_k, u_k)$ der Lagrange-Funktion

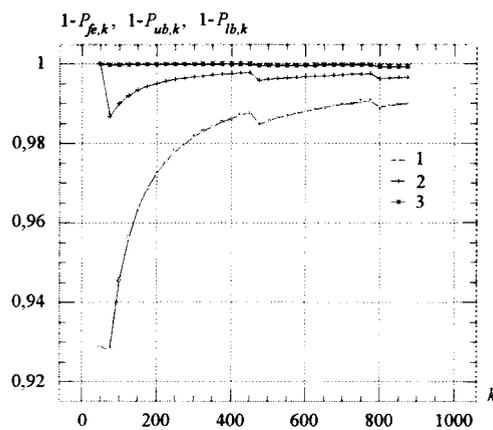


Bild 5. Variation der statistischen Schätzung $1 - P_{fe,k}$ der System-Überlebenswahrscheinlichkeit $P_{suc}(EX'_k) = 1 - P_{fail}(EX'_k)$ (2. Diagramm) sowie unteren und oberen Konfidenzgrenzen $1 - P_{ub,k}$ und $1 - P_{lb,k}$ für $P_{suc}(EX'_k)$ (1. und 3. Diagramme)

Zur zweiten Gruppe gehören die Werte, die zum Stopp der Berechnungen nach den Prozeduren (37) und (39) errechnet werden, also in den Stoppregeln (41), (45) und (50) auftreten:

1. Die Werte der linken und rechten Seite der Ungleichung in der Stoppregel (41) bei $k = \tau$ (vgl. Tabellen 4-c und 5-c).
2. Die unteren Konfidenzgrenzen $w_{lb,\tau}$ nach Gl.(47) der 95-prozentuellen Konfidenzintervalle für $W(\mathbf{EX}'_{\tau})$ und $W(\mathbf{EX}'_{d\tau})$ (vgl. Tabellen 4-b und 5-b).
3. Die statistischen Schätzungen $1 - P_{fe,\tau}$ der System-Überlebenswahrscheinlichkeiten $P_{suc}(\mathbf{EX}'_{\tau}) = 1 - P_{fail}(\mathbf{EX}'_{\tau})$ und $P_{suc}(\mathbf{EX}'_{d\tau}, T) = 1 - P_{fail}(\mathbf{EX}'_{d\tau}, T)$ (vgl. Tabellen 4-d und 5-d).
4. Die Grenzen $1 - P_{ub,\tau}$ und $1 - P_{lb,\tau}$ der 95-prozentuellen Konfidenzintervalle für $P_{suc}(\mathbf{EX}'_{\tau})$ und $P_{suc}(\mathbf{EX}'_{d\tau}, T)$ (vgl. Tabellen 4-d und 5-d).

Die in den Tabellen 4 und 5 zusammengestellten Ergebnisse der Lösung der Optimierungsaufgaben (33) und (34) lassen sich auf verschiedene Weise interpretieren, und zu allererst muß man sagen, daß diese Ergebnisse die Möglichkeit, Tragwerke mittels des Verfahrens der *Lagrange*-Multiplikatoren zu optimieren, prinzipiell beweisen. Aus der Formulierung der Optimierungsaufgabe (33) folgt, daß die Ergebnisse ihrer Lösung auf natürlichste Weise für das statistische Aufspüren der Kurve

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{EX}' \mid W(\mathbf{EX}') = \min_{U \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2} W(U), P_{suc}(\mathbf{EX}') > P_{suc,a} \right\} \quad (51)$$

und des Bildes der Funktion

$$y = f(P_{suc,a}) = \min \{ W(\mathbf{EX}') \mid P_{suc}(\mathbf{EX}') > P_{suc,a} \} \quad (52)$$

zustatten kommen können. Verbindet man mit Geraden die Punkte $(Ed_{\tau}, 1 - P_{ub,\tau})$, $(EA_{st}, 1 - P_{ub,\tau})$ und $(w_{m\tau}, 1 - P_{ub,\tau})$ mit den in den Tabellen 4-a, 4-b und 4-d angeführten Koordinaten, so wie das in den Bildern 6 und 7 dargestellt ist, dann kann man erhaltene Polygonzüge als graphische Schätzungen der Kurven (51) und (52) betrachten. Im Bild 6 bilden die jeder Abszisse $1 - P_{ub,\tau}$ entsprechenden Ordinaten Ed_{τ} und EA_{st} einen Punkt, der im Koordinatensystem $\{0; Ed, EA_s\}$ in einer gewissen Nähe der Kurve (51) liegt.

Tabelle 4 Ergebnisse der Lösung der Optimierungsaufgabe (33)

Tabelle 4-a Werte der Bemessungsvariablen in der Stoppiteration

$P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a}$	Nummer der Stoppiteration τ	Komponenten von \mathbf{EX}'_{τ}	
		$EX_{1,\tau}(Ed_{\tau}, m)$	$EX_{2,\tau}(EA_{st}, m^2)$
0,999	5570	0,531	$23,90 \cdot 10^{-4}$
0,995	3131	0,462	$19,36 \cdot 10^{-4}$
0,99	874	0,445	$18,08 \cdot 10^{-4}$
0,98	354	0,440	$17,61 \cdot 10^{-4}$
0,97	432	0,417	$18,21 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 4-b Statistische Schätzungen der Werte $W(EX'_\tau)$ der Zielfunktion *

$P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a}$	Nummer der Stoppiteration τ	$w_{lb,\tau}$, m ³	$w_{m\tau}$, m ³
0,999	5570	1,749	1,753
0,995	3131	1,480	1,483
0,99	874	1,480	1,411
0,98	354	1,385	1,388
0,97	432	1,353	1,357

*mit $w_{m\tau}$ und $w_{lb,\tau}$ wird in der vorliegenden Tabelle die Punktschätzung gemäß der Gl.(48) und die untere Grenze gemäß der Gl.(47) des Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau 0,95 für $W(EX'_\tau)$ bezeichnet; die vorliegenden Werte von $w_{m\tau}$ und $w_{lb,\tau}$ erfüllen die Ungleichung in der Stoppregel (45) bei $\varepsilon = 0,01$

Tabelle 4-c Werte in der Stoppiteration der rechten und linken Seite der Ungleichung in der Stoppregel (41) *

$P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a}$	Nummer der Stoppiteration τ	$\frac{T_\tau^2(\tau - 1)}{2\tau}$	$F_{(2, \tau - 1), 0,95}$
0,999	5570	1,35942	2,99573
0,995	3131	0,92711	2,99573
0,99	874	1,22514	2,99573
0,98	354	1,11311	3,04114
0,97	432	1,58776	3,03679

*in der betrachteten Optimierungsaufgabe gilt für die linke Seite der Ungleichung in der Stoppregel (41) $l = 2$

Tabelle 4-d Statistische Schätzungen der System-Überlebenswahrscheinlichkeit $P_{suc}(EX'_\tau) = 1 - P_{fail}(EX'_\tau)$ *

$P_{suc,a} = 1 - P_{fail,a}$	Nummer der Stoppiteration τ	$1 - P_{ub,\tau}$	$1 - P_{fs,\tau}$	$1 - P_{lb,\tau}$
0,999	5570	0,999000	0,999920	0,999995
0,995	3131	0,995033	0,998084	0,999297
0,99	874	0,990001	0,996568	0,999292
0,98	354	0,980021	0,994429	0,999325
0,97	432	0,970016	0,986111	0,994887

*mit $P_{lb,\tau}$ und $P_{ub,\tau}$ werden in der vorliegenden Tabelle die gemäß den *Clopperschen-Pearsonschen* Gleichungen [12] berechneten Grenzen des Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau 0,95 für die Werte $P_{fail}(EX'_\tau)$ der System-Versagenswahrscheinlichkeit bezeichnet

Tabelle 5 Ergebnisse der Lösung der Optimierungsaufgabe (34)

Tabelle 5-a Werte der Bemessungsvariablen in der Stoppiteration

T, Jahr	Nummer der Stoppiteration τ	Komponenten von $EX'_d\tau$	
		$EX'_{1d,\tau}(Ed_\tau, m)$	$EX'_{2d,\tau}(EA'_{3d,\tau}, m^2)$
0	1303	0,445	$18,08 \cdot 10^{-4}$
10	1164	0,434	$23,20 \cdot 10^{-4}$
20	1021	0,467	$24,00 \cdot 10^{-4}$
30	1021	0,492	$24,40 \cdot 10^{-4}$
40	720	0,507	$24,60 \cdot 10^{-4}$
50	874	0,506	$25,20 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5-b Statistische Schätzungen der Werte $W(EX'_{dt})$ der Zielfunktion *

T, Jahr	Nummer der Stoppiteration τ	$w_{b,\tau}$, m ³	$w_{m\tau}$, m ³
0	1303	1,407	1,411
10	1164	1,571	1,578
20	1021	1,641	1,646
30	1021	1,686	1,693
40	720	1,718	1,726
50	874	1,726	1,731

*mit $w_{m\tau}$ und $w_{b,\tau}$ wird in der vorliegenden Tabelle die Punktschätzung gemäß der Gl.(48) und die untere Grenze gemäß der Gl.(47) des Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau 0,95 für $W(EX'_d)$ bezeichnet; die vorliegenden Werte von $w_{m\tau}$ und $w_{b,\tau}$ erfüllen die Ungleichung in der Stoppregel (45) bei $\varepsilon = 0,01$

Tabelle 5-c Werte in der Stoppiteration der rechten und linken Seite der Ungleichung in der Stoppregel (41) *

T, Jahr	Nummer der Stoppiteration τ	$\frac{T^2(\tau - 1)}{2\tau}$	$F_{(2, \tau - 1); 0,95}$
0	1303	0,91622	2,99573
10	1164	0,99512	2,99573
20	1021	1,12128	2,99573
30	1021	1,20256	2,99573
40	720	0,81899	2,99573
50	874	1,11451	2,99573

*in der betrachteten Optimierungsaufgabe gilt für die linke Seite der Ungleichung in der Stoppregel (41) $l = 2$

Tabelle 5-d Statistische Schätzungen der System-Überlebenswahrscheinlichkeiten $P_{suc}(EX'_{dt}, T) = 1 - P_{fail}(EX'_{dt}, T)$ *

T, Jahr	Nummer der Stoppiteration τ	$1 - P_{ub,\tau}$	$1 - P_{fa,\tau}$	$1 - P_{lb,\tau}$
0	1303	0,990004	0,995395	0,998309
10	1164	0,990004	0,995704	0,998604
20	1021	0,990000	0,996082	0,998932
30	1021	0,990000	0,996082	0,998932
40	720	0,990002	0,997222	0,999664
50	874	0,990001	0,996568	0,999292

*mit $P_{lb,\tau}$ und $P_{ub,\tau}$ werden in der vorliegenden Tabelle die gemäß den *Clopperschen-Pearsonischen* Gleichungen [12] berechneten Grenzen des Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau 0,95 für die Werte $P_{fail}(EX'_{dt}, T)$ der System-Versagenswahrscheinlichkeit bezeichnet

Auf ähnliche Weise kann man bei der Betrachtung der Lösungsergebnisse der Optimierungsaufgabe (34) aus den Punkten (Ed_τ, T) , $(EA_{sd\tau}, T)$ und $(w_{m\tau}, T)$ mit den in den Tabellen 5-a und 5-b angeführten Koordinaten Polygonzüge bilden (Bilder 8 und 9). Man kann dann die Polygonzüge als graphisch dargestellten statistischen Schätzungen der Kurve

$$\Xi = \left\{ EX'_d \mid W(EX'_d) = \min_{U \in \mathcal{U} \subset R^2} W(U), P_{suc}(EX'_d, T) > P_{suc,a} \right\} \quad (53)$$

und des Bildes der Funktion

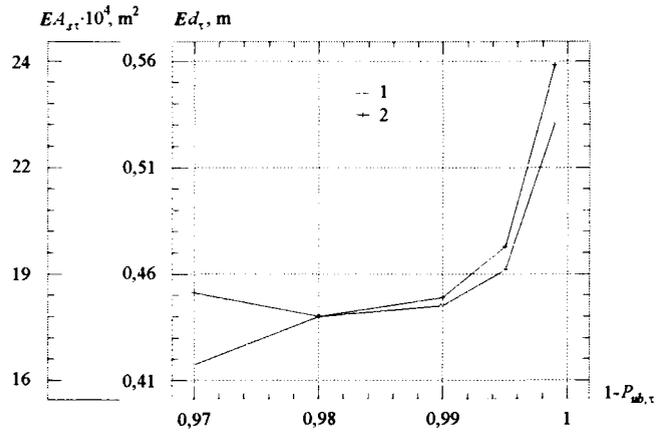


Bild 6. Polygonzüge zur Abschätzung der Komponenten Ed (1.Polygonzug) und EA_s (2.Polygonzug) des Punktes EX' der Kurve (51)

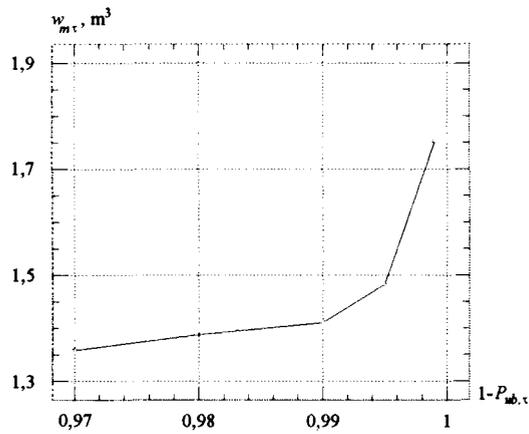


Bild 7. Polygonzug zur Abschätzung des Bildes der nach Gl.(52) definierten Funktion $y = f(P_{suc,a})$

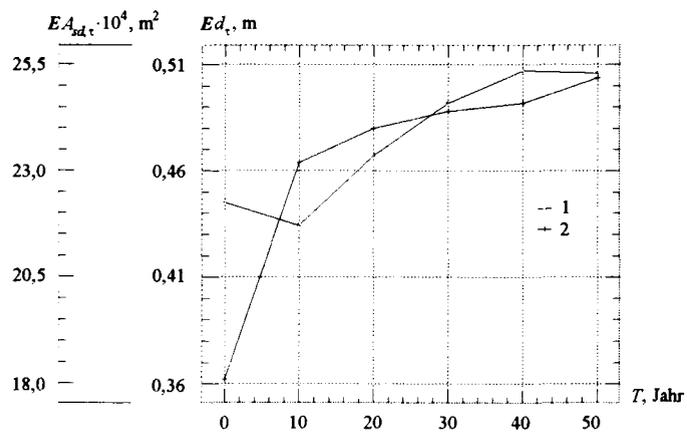


Bild 8. Polygonzüge zur Abschätzung der Komponenten Ed (1.Polygonzug) und EA_{sd} (2.Polygonzug) des Punktes EX'_d der Kurve (53)

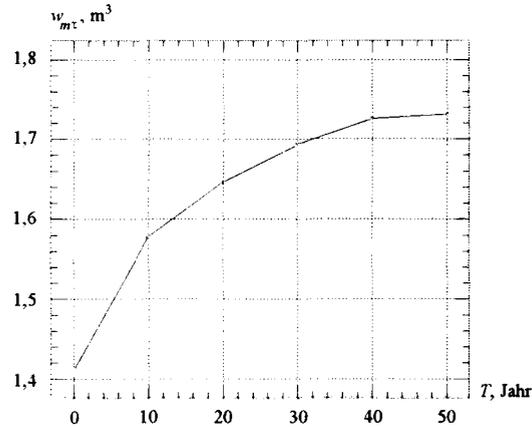


Bild 9. Polygonzug zur Abschätzung des Bildes der nach Gl.(54) definierten Funktion $y = \varphi(T)$

$$y = \varphi(T) = \min\{W(\mathbf{EX}'_d) \mid P_{suc}(\mathbf{EX}'_d, T) > P_{suc,a}\} \quad (54)$$

betrachten. Im Bild 8 bilden die jeder Abszisse T entsprechenden Ordinaten Ed_τ und $EA_{sd\tau}$ einen Punkt, der im Koordinatensystem $\{0; Ed, EA_{sd}\}$ in einer gewissen Nähe der Kurve (53) liegt.

Es ist bemerkenswert, daß alle in den Bildern 6 bis 9 dargestellten Abhängigkeiten im Sinne der Zuverlässigkeit sozusagen auf der konservativen Seite liegen, d.h. die Ordinaten der Polygonzugpunkte mit den unteren Konfidenzgrenzen $1 - P_{ub,\tau}$ von $P_{fail}(\mathbf{EX}'_\tau)$ und $P_{fail}(\mathbf{EX}'_{d\tau}, T)$ und nicht mit den Punktschätzungen $1 - P_{fe,\tau}$ assoziiert sind. Das hat die folgenden Gründe:

1. Für die oberen Konfidenzgrenzen $P_{ub,\tau}$ gelten die Beziehungen $Prob[P_{fail}(\mathbf{EX}'_\tau) \leq P_{ub,\tau}] \geq 0,95$ und $Prob[P_{fail}(\mathbf{EX}'_{d\tau}, T) \leq P_{ub,\tau}] \geq 0,95$, während für die Punktschätzungen $P_{fe,\tau}$ keine Aussagen von solcher Art möglich sind.
2. Die oberen Konfidenzgrenzen $P_{ub,\tau}$ liegen in einer unmittelbaren Nähe der vorgeschriebenen zulässigen System-Versagenswahrscheinlichkeiten $P_{fail,a}$ (vgl. Tabellen 4-d und 5-d). Die Differenzen $(P_{fail,a} - P_{ub,\tau})/P_{fail,a}$ liegen in den Grenzen 0 ... 6,6% für die Optimierungsaufgabe (33) und 0 ... 0,04% für die Optimierungsaufgabe (34).

Die Konfidenz der Folgerungen, die man aus Lösungsergebnissen der Optimierungsaufgaben (33) und (34) ziehen kann, läßt sich durch die Annahme des breiteren und dichteren Spektrums der Werten von $P_{fail,a}$ vergrößern. Außerdem kann man sich durch systematische Änderung der Startpunkte (\mathbf{EX}'_0, u_0) und (\mathbf{EX}'_{d0}, u_0) einen gewissen Überblick über die Lösungsmenge der Optimierungsaufgaben verschaffen. Entscheidend für die Konvergenzgeschwindigkeit der Prozeduren (37) und (39) ist die Wahl der Folge $\{\rho_k\}$. Bemerkenswert ist dabei, daß bei einer und derselben Wahl der Schrittweite gemäß der Gl.(23) eine Variation ihrer Parameter Δ_1 und Δ_2 zu einer entsprechenden Variation von Lösungsergebnissen und vor allem von \mathbf{EX}'_τ und $\mathbf{EX}'_{d\tau}$ sogar dann führt, wenn das Iterieren in einem und demselben Startpunkt (\mathbf{EX}'_0, u_0) oder (\mathbf{EX}'_{d0}, u_0) anfängt. Solche Variation der Lösungsergebnisse öffnet einen zusätzlichen Raum für ihre statistische Interpretation.

6. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Mit Hilfe des Verfahrens der *Lagrange*-Multiplikatoren werden für das Beispiel eines schlaff bewehrten Stahlbetonbalkens methodische Aspekte der Einbeziehung von Verfahren der stochastischen Quasigradienten in die zuverlässigkeitstheoretisch gestützte Tragwerksoptimierung betrachtet. Dazu ist das klassische zuverlässigkeitstheoretische Optimierungsproblem, d.h. die Minimierung von Baukosten, Gewicht oder Volumen eines Tragwerkes unter Einschränkung seiner Zuverlässigkeit, gewählt. Das Optimierungsproblem wird als Standardaufgabe der stochastischen Programmierung formuliert. Als Zielfunktion wird bei der Optimierung des Stahlbetonbalkens der Erwartungswert des nach Kosten in der Konstruktion reduzierten Volumens des Stahlbetons verwendet. In der Nebenbedingung wird die Versagenswahrscheinlichkeit des als zuverlässigkeitstheoretische Seriensystem betrachteten Stahlbetonbalkens eingeschränkt. Werte der zulässigen Versagenswahrscheinlichkeiten werden in dem Intervall vorgegeben, in dem sie durch die einfache *Monte-Carlo*-Methode abschätzbar sind. Durch die Einbeziehung in die Nebenbedingung der quasilinearen Verteilung des Vektors der Zufallsvariablen wird die Verallgemeinerung des zeitunabhängigen Falles auf einen zeitabhängigen vorgenommen: der Erwartungswert des nach Kosten in der Konstruktion reduzierten Volumens des Balkens, der sich an den Anfang seiner Nutzung bezieht, wird unter Einschränkung der System-Versagenswahrscheinlichkeit des Balkens am Ende seiner vorgeschriebenen Nutzungsdauer minimiert.

Für die Berechnungen mit dem Verfahren der *Lagrange*-Multiplikatoren wird anstatt stochastischer Differenzenformeln der Ausdruck des stochastischen Gradienten genutzt, der sich auf die Differenzierung unter dem Integralzeichen gründet. Der Ausdruck ermöglicht die Suche nach Sattelpunkte der *Lagrange*-Funktion ohne mehrmaligen Durchrechnung in jeder Optimierungssiteration der Grenzzustandsfunktionen des Tragwerkes. Für den Abbruch der Suche, die gemäß der Prozedur des Verfahrens der *Lagrange*-Multiplikatoren geführt wird, dienen drei statistisch argumentierte Stoppregeln.

Die durchgeführten Optimierungen zeigen, daß das Verfahren der *Lagrange*-Multiplikatoren für die zuverlässigkeitstheoretisch gestützte Tragwerksoptimierung anwendbar ist, dabei in den Fällen, wann sich die Zuverlässigkeit des zu optimierenden Tragwerkes mit Hilfe der einfachen *Monte-Carlo*-Methode abschätzen läßt. Weitere Untersuchungen müssen zeigen, ob Simulationsverfahren zur Berechnung kleiner Versagenswahrscheinlichkeiten in das untersuchte Optimierungsverfahren einbeziehen lassen.

Literatur

1. G. Spaethe. Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1987, 248 S.
2. H.O. Madsen, S. Krenk, N.C. Lind. Methods of Structural Safety. Prentice-Hall, Eglewood Cliffs, New Jersey, 1986, 400 p.
3. P. Thoft-Christensen, Y. Murotsu. Application of Structural Systems Reliability Theory. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1986, 360 p.
4. A. Kudzys. Probability Estimation of Reliability and Durability of Reinforced Concrete Structures. Vilnius: Technical Univ. Press, 1992, 143 p.
5. Yu. Ermoliev. Stochastic Quasigradient Methods // Numerical Techniques for Stochastic Optimization, ed. by Yu. Ermoliev and R. Wets. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988, p. 141-185.
6. Yu. Ermoliev. Stochastic Quasigradient Methods and Their Application to System Optimization// Stochastics, 1983, vol. 9, No. 1,2, p. 1-36.
7. G.Ch. Pflug. Stepsize Rules, Stopping Times and Their Implementation in Stochastic Quasigradient Algorithms // Numerical Techniques for Stochastic Optimization, ed. by Yu.Ermoliev and R.Wets. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988, p. 353-372.
8. A. Gaivoronski. Stochastic Quasigradient Methods and Their Implementation // Numerical Techniques for Stochastic Optimization, ed. by Yu.Ermoliev and R.Wets. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988, p. 313-351.
9. S. Urasiev. Adaptive Stochastic Quasigradient Procedures // Numerical Techniques for Stochastic Optimazation, ed. by Yu.Ermoliev and R.Wets. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988, p. 373-384.
10. В.М.Александров, В.И.Сысоев, В.В.Шеменова. Стохастическая оптимизация систем//Техническая кибернетика, 1968, № 5, с. 25-42.
11. E.R. Vaidogas. Verfahren zur zuverlässigkeitstheoretischen Tragwerksoptimieoptimierung. Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor der Ingenieurwissenschaften des Fachbereiches Bauwesen / TU Vilnius. Vilnius, 1994, 131 S.
12. P.H. Müller (Hrsg.). Lexikon der Stochastik. Berlin: Akademie-Verlag, 1975, 525 S.
13. А.П. Кудзис. Железобетонные и каменные конструкции. В 2-х частях. Ч.1. Материалы, конструирование, теория и расчет. М.: Высш. шк., 1988, 225 с.
14. G.I. Schuëller, R. Stix.,: A Critical Appraisal of Methods to Determine Failure Probabilities//Structural Safety, 1987, No. 4, p. 293-309.

ON RELIABILITY-BASED STRUCTURAL OPTIMISATION USING STOCHASTIC QUASIGRAIENT METHODS

E.-R. Vaidogas

S u m m a r y

Methodical aspects of the reliability-based structural optimisation using stochastic quasigradient methods are considered. For an example of the simply supported reinforced concrete beam, the employment of the *Lagrange* multiplier method that belongs to the class of stochastic quasigradient methods is demonstrated. The classical optimum design goal to minimise structural cost or weight under the constraint on the structural failure probability is taken for consideration. Optimisation problems solved with the *Lagrange* multiplier method are formulated in form of general stochastic programming problem. The mathematical expectation of the concrete volume reduced with respect to the in-place cost of the beam materials is taken as the objective function. Constraint function is the limitation placed on the beam failure probability. The beam is considered as a series structural system. Values of the prescribed allowable failure probability belongs to the interval in which the estimation of the failure probabilities by the simple *Monte-Carlo* method is possible with an acceptable confidence. The time-independent case as well as the time-dependent one is considered in the optimisation problems. The generalisation on the time-dependent case is undertaken through the introduction into the constraint function of the quasi-linear distribution law of the random variables. In the time-dependent case, the objective function is associated with beginning and the constraint function with end of the service period.

An expression of the stochastic gradient based on the differentiation under the integral sign is used for calculations with the *Lagrange* multiplier method. The stochastic gradient used is computationally more effective in comparison with stochastic finite-difference formulae usual in stochastic quasigradient methods because it requires only one computation of the structure in search iteration of the optimisation process. Three rules based on statistical argumentation are used for the stopping of the seat according to the procedure of the *Lagrange* multiplier method.

The optimising of the beam shows that the *Lagrange* multiplier method is applicable for the optimal design of structures in that cases when the structural reliability can be estimated by means of the simple *Monte-Carlo* method. Additional research is needed for integration in the *Lagrange* multiplier method of statistical simulation techniques for the estimation of small structural failure probabilities.