Statyba

ISSN: 1392-1525 (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/tcem19

DUAL LIMIT ANALYSIS PROBLEMS WITH DISCONTINUITY OF DISPLACEMENT VELOCITIES

S. Kalanta

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ С РАЗРЫВАМИ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

С. Каланта

1. Введение

Двойственные математические модели задач предельного равновесия для сплошного тела построены А.Чирасом [1],[2]. Пластическое разрушение тонких пластинок и оболочек обычно происходит из-за образования линий разрушения, где скорости перемещений претерпевают разрывы и происходит диссипация энергии. Однако в двойственных конечноэлементных математических моделях задач скорость диссипации энергии в поверхностях разрушения обычно не учитывается, т. есть негласно принимается предположение о неразрывности скоростей перемещений. Поэтому они не могут моделировать действительного поведения пластинок и оболочек. Разрывы скоростей перемещений обычно учитываются лишь в тех кинематических постановках задачи предельной нагрузки [3,4], которые построены на основе кинематической теоремы предельного равновесия независимо от статической постановки задачи. Наша цель – построить двойственные математические модели задач предельного равновесия, в которых учитывались бы возможные разрывы скоростей перемещений. Эти разрывы могут быть обусловлены образованием поверхностей пластического разрушения, а также существующими трещинами. Исследования ограничиваются случаем простого нагружения.

2. Основные зависимости и определения

Рассматривается жесткопластическое тело, разделенное на r конечных элементов, между которыми могут быть разрывы скоростей перемещений $\dot{u}(x)$. Нагрузка F(x) распределена на поверхности S_f. Функции, относящиеся к смежным конечным элементам, разделенным поверхностью S_t, обозначаются знаками "+" и "–".

Статически допустимые вектор-функции напряжений σ_k описываются уравнениями равновесия

$$
\begin{aligned}
&[\mathscr{A}]\sigma_k = \mathbf{0} \quad \in V_k, \qquad -[A_s]\sigma + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \in S_f, \\
&-[A_t]\sigma_t^+ + \mathbf{p}_t = \mathbf{0}, \qquad [A_t]\sigma_t^- - \mathbf{p}_t = \mathbf{0} \quad \in S_t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

и условиями текучести

$$
\begin{gathered}
\mathbf{f}(\sigma_k) \le \mathbf{f}_0(C_k) \quad \in V_k, \quad \mathbf{f}_t(\sigma_t) \le \mathbf{f}_{0t}(C_t) \quad \in S_t; \\
k = 1,2,\ldots,r, \quad t = 1,2,\ldots,z.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Кинематически возможные вектор–функции скоростей перемещений должны удовлетворять кинематическим уравнениям

$$
\begin{gathered}
-[\tilde{\mathbf{f}}(\sigma_k)]^T \dot{\lambda}_k + [\mathrm{A}]^T \dot{\mathbf{u}}_k = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_k \ge \mathbf{0} \quad \in V_k, \\
-[\tilde{\mathbf{f}}_t(\mathbf{p}_t)]^T \dot{\lambda}_t - \dot{\mathbf{u}}_t^+ + \dot{\mathbf{u}}_t^- = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_t \ge \mathbf{0} \quad \in S_t, \quad [A_s]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \in S_t
\end{gathered}
\tag{3}
$$

и условиям дополняющей нежесткости

$$
\dot{\lambda}_k^T\{\mathbf{f}_0(C_k) - \mathbf{f}(\sigma_k)\} = 0 \quad \in V_k, \quad \dot{\lambda}_t^T\{\mathbf{f}_{0t}(C_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)\} = 0 \quad \in S_t. \tag{4}
$$

Здесь $\dot{\lambda}_k$, $\dot{\lambda}_t$, $[\tilde{\mathbf{f}}(\sigma_k)]$, $[\tilde{\mathbf{f}}_t(\mathbf{p}_t)]$ – вектор–функции пластических множителей и матрицы градиентов функций текучести в объеме V_k и на поверхности S_t, C_k– функция константы пластичности k –го элемента.

Двойственные математические модели задач могут быть построены на основе статических теорем теории предельного равновесия и теории двойственности [1]. Однако они могут быть получены также из некоторых функционалов путем принятия предварительных условий. Ниже этот способ иллюстрируется на примере задачи оптимизации нагрузки.

3. Задачи оптимизации нагрузки

Определяется напряженно–деформированное состояние тела (геометрия и условия опирания заданы), отвечающее простому пластическому разрушению и заданному критерию оптимальности нагрузки $\max\ \varphi_1 = \int \mathbf{T}^T\mathbf{F}ds$. $\mathbf{T}$ – вектор весовых коэффициентов, означающих влияние (стоимость) распределенной на единичной площади нагрузки единичной интенсивности. За условие оптимальности нагрузки принимается условие постоянства мощности нагрузки

$$
\frac{\dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{F}}{\mathbf{T}^T\mathbf{F}} = const \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{T} = c\mathbf{T}^T\mathbf{F}.
$$

Тогда функция φ_1 получает смысл мощности нагрузки. Рассмотрим функционал

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 = &\sum_k \int_{V_k} \sigma_k^T[\mathscr{A}]^T \dot{\mathbf{u}}_k dv + \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T\{\mathbf{f}_0(c_k) - \mathbf{f}(\sigma_k)\}dv + \int_{S_f} \mathbf{F}^T(\mathbf{T} - \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}})ds - \\
&\int_{S_u} \sigma^T[A_s]^T \dot{\mathbf{u}}\, ds + \sum_t \int_{S_t} \mathbf{p}_t^T(\dot{\mathbf{u}}_t^- - \dot{\mathbf{u}}_t^+)ds + \sum_t \int_{S_t} \dot{\lambda}_t^T\{\mathbf{f}_{0t}(c_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)\}ds,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\dot{\lambda}_k \geq \mathbf{0} \quad \in V_k$; $\dot{\lambda}_t \geq \mathbf{0} \quad \in S_t$; $\dot{\mathbf{v}} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{F} \geq \mathbf{0} \quad \in S_f$; $k = 1,2,\ldots,r$; $t = 1,2,\ldots,z$.

Условиями Куна–Таккера для этого функционала являются условия (1)–(4) и

$$\dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T} \quad \in S_f. \tag{6}$$

Поэтому минимаксная задача о нахождении седловой точки функционала $\mathscr{F}_1$ представляет собой задачу оптимизации нагрузки. Для кинематически допустимых векторов скоростей перемещений, которые удовлетворяют условиям (3), (4) и (6), функционал $\mathscr{F}_1$ имеет физический смысл скорости диссипации энергии. Поэтому минимаксную задачу (5) можно заменить задачей минимизации скорости диссипации энергии

$$\begin{gathered}\mathscr{F}_2 = \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T \left[\tilde{\mathbf{f}}(\sigma_k)\right] \sigma_k dv + \sum_t \int_{S_t} \dot{\lambda}_t^T \left[\tilde{\mathbf{f}}_t(\mathbf{p}_t)\right] \mathbf{p}_t ds + \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T \left\{\mathbf{f}_0(C_k) - \mathbf{f}(\sigma_k)\right\} dv + \\ + \sum_t \int_{S_t} \dot{\lambda}_t^T \left\{\mathbf{f}_{0t}(C_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)\right\} ds \to \min\end{gathered} \tag{7}$$

при условиях (3), (6). Она отвечает кинематической теореме о предельной нагрузке [1] и позволяет определить напряжения и скорости перемещений, соответствующие предельному состоянию тела и заданному критерию оптимальности нагрузки.

Применив к первому интегралу формулу Гаусса–Остроградского, функционал $\mathscr{F}_1$ можно преобразовать к виду:

$$\begin{gathered}\mathscr{F}_3 = -\sum_k \int_{V_k} \dot{\mathbf{u}}_k^T [\mathscr{A}] \sigma_k dv + \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T \left\{\mathbf{f}_0(C_k) - \mathbf{f}(\sigma_k)\right\} dv + \int_{S_f} (\mathbf{T} + \dot{\mathbf{v}})^T \mathbf{F} ds + \int_{S_f} \dot{\mathbf{u}}^T \left\{[A_s]\sigma - \mathbf{F}\right\} ds + \\ + \sum_t \int_{S_t} \left(\dot{\mathbf{u}}_t^+\right)^T \left\{[A_t]\sigma^+ - \mathbf{p}_t\right\} ds + \sum_t \int_{S_t} \left(\dot{\mathbf{u}}_t^-\right)^T \left\{\mathbf{p}_t - [A_t]\sigma^-\right\} ds + \sum_t \int_{S_t} \dot{\lambda}_t^T \left\{\mathbf{f}_{0t}(C_t) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)\right\} ds, \\ \dot{\lambda}_k \geq \mathbf{0} \ \in V_k; \ \dot{\lambda}_t \geq \mathbf{0} \ \in S_t; \ \dot{\mathbf{v}} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{F} \geq \mathbf{0} \ \in S_f; \ k = 1,2,\ldots,r; \ t = 1,2,\ldots,z.\end{gathered} \tag{8}$$

Для статически допустимых векторов напряжений σ_k этот функционал имеет физический смысл мощности внешней нагрузки. Поэтому, условия (1) и (2) принимая в качестве ограничений на мощность нагрузки, из минимаксной задачи (8) получаем математическую модель статической постановки задачи:

$$\int_{S_f} \mathbf{T}^T \mathbf{F} ds \to \max \quad \text{при условиях (1), (2) и } \mathbf{F} \geq \mathbf{0} \quad \in S_f. \tag{9}$$

Она отвечает статической теореме о предельной нагрузке [1] и позволяет определить напряженное состояние и оптимальное распределение нагрузки. Если задан закон рапределения нагрузки $\mathbf{F} = \eta F_0$, то заменив условие $\dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T}$ условием $\int_{S_f} \dot{\mathbf{u}}^T \eta = 1$, получим математические модели задачи определения параметра F_0 предельной нагрузки.

Поверхности начальных разрывов не включаются в число z возможных поверхностей разрушения S_t. Они включаются в граничную область S_f и для них составляются лишь статические граничные условия. Если, кроме оптимизируемой, действует и заданная нагрузка, то функции текучести следует заменить функциями $\mathbf{f}(\sigma_{ek}+\sigma_k)$ и $\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_{et}+\mathbf{p}_t)$, где σ_{ek}, $\mathbf{p}_{et}$ – векторы напряжений упругого расчета от заданной нагрузки.

4. Задачи оптимизации параметров тела

При заданных условиях опирания, внешних нагрузках и критерии оптимальности $\min \varphi_2 = \sum_k \int_{V_k} \gamma_k C_k dv$ требуется определить напряженно–деформированное состояние тела, отвечающее его простому пластическому разрушению. γ_k– заданная функция стоимости единичного объема материала k –го элемента с единичным параметром C_k. Принимается $C_k = const$ в V_k. Тогда функция $\varphi_2 = \sum_k \Lambda_k C_k$ выражает стоимость дискретной модели тела. За условие оптимальности принимается условие постоянства скорости диссипации энергии на единицу стоимости [5]:

$$\frac{\dot{D}_k}{\Lambda_k C_k} = const \quad \text{или} \quad \dot{D}_k = c\Lambda_k C_k \quad \text{для} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Тогда функция получает смысл скорости диссипации энергии. На основе статической теоремы о простом пластическом разрушении [1] получаем математическую модель статической постановки задачи:

$$\sum_k \Lambda_k C_k \to \min \tag{10}$$

$$\begin{array}{llll} -[\mathscr{A}]\sigma_k = \mathbf{g}_k, & \mathbf{f}_0(C_k) - \mathbf{f}(\sigma_k) \geq \mathbf{0} \ \in V_k, & C_k \geq 0 & \in V_k, \\ [A_t]\sigma_t^+ - \mathbf{p}_t^+ = \mathbf{0}, & \mathbf{f}_{0t}(C_t^+) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+) \geq \mathbf{0} \ \in S_t^+, & \mathbf{p}_t^+ + \mathbf{p}_t^- = \mathbf{0} & \in S_t, \\ -[A_t]\sigma_t^- - \mathbf{p}_t^- = \mathbf{0}, & \mathbf{f}_{0t}(C_t^-) - \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-) \geq \mathbf{0} \ \in S_t^-, & [A_s]\sigma = \mathbf{F} & \in S_t; \\ & k = 1,2,\ldots,r; \quad t = 1,2,\ldots,z. & & \end{array} \tag{11}$$

Функционал Лагранжа для этой задачи

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_4 = {} & \sum_k \Lambda_k C_k + \sum_k \int_{V_k} \dot{\mathbf{u}}_k^T \{g_k + [\mathscr{A}]\sigma_k\} dv + \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T \{\mathbf{f}(\sigma_k) - \mathbf{f}_0(C_k)\} dv - \sum_k \alpha_k C_k + \\ & + \sum_t \int_{S_t^+} (\dot{\mathbf{u}}_t^+)^T \{\mathbf{p}_t^+ - [A_t]\sigma_t^+\} ds + \sum_t \int_{S_t^-} (\dot{\mathbf{u}}_t^-)^T \{\mathbf{p}_t^- + [A_t]\sigma_t^-\} ds - \sum_t \int_{S_t} \dot{\mathbf{u}}_t^T \{\mathbf{p}_t^+ + \mathbf{p}_t^-\} ds + \\ & + \sum_t \int_{S_t^+} (\dot{\lambda}_t^+)^T \{\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+) - \mathbf{f}_{0t}(C_t^+)\} ds + \sum_t \int_{S_t^-} (\dot{\lambda}_t^-)^T \{\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-) - \mathbf{f}_{0t}(C_t^-)\} ds + \int_{S_f} \dot{\mathbf{u}}^T \{\mathbf{F} - [A_s]\sigma\} ds, \end{aligned} \tag{12}$$

$\dot{\lambda}_k \geq \mathbf{0}$, $\alpha_k \geq 0$, $C_k \geq 0$ $\in V_k$; $\dot{\lambda}_t^+ \geq \mathbf{0}$ $\in S_t^+$, $\dot{\lambda}_t^- \geq \mathbf{0}$ $\in S_t^-$; $k = 1,2,\ldots,r$; $t = 1,2,\ldots,z$.

Для статически допустимых векторов напряжений, удовлетворяющих условиям (11), он выражает скорость диссипации энергии и может быть принят за исходный функционал при построении двойственных математических моделей задачи оптимизации параметров тела. Решение σ_k^*, C_k^* минимаксной задачи (12) представляет собой решение задачи минимизации (10)–(11) и наоборот.

Применив формулу Гаусса–Остроградского, можно построить вторую форму функционала Лагранжа, который для кинематически допустимых скоростей перемещений выражает мощность нагрузки. Поэтому задача минимакса функционала Лагранжа эквивалентна задаче максимизации мощности нагрузки

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_5 = &\int\limits_{S_f} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}}\, ds + \sum_k \int\limits_{V_k} \mathbf{g}_k^T \dot{\mathbf{u}}_k dv + \sum_k \int\limits_{V_k} \dot{\lambda}_k^T \left\{ \left[\tilde{\mathbf{f}}_0(C_k)\right] C_k - \left[\tilde{\mathbf{f}}(\sigma_k)\right] \sigma_k \right\} dv + \\ &+ \sum_k \int\limits_{V_k} \dot{\lambda}_k^T \left\{ \mathbf{f}(\sigma_k) - \mathbf{f}_0(C_k) \right\} dv + \sum_t \int\limits_{S_t^+} \left(\dot{\lambda}_t^+\right)^T \left\{ \left[\tilde{\mathbf{f}}_{0t}\left(C_t^+\right)\right] C_t^+ - \left[\tilde{\mathbf{f}}_t\left(\mathbf{p}_t^+\right)\right] \mathbf{p}_t^+ - \mathbf{f}_{0t}\left(C_t^+\right) + \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^+\right) \right\} ds + \\ &+ \sum_t \int\limits_{S_t^+} \left(\dot{\lambda}_t^-\right)^T \left\{ \left[\tilde{\mathbf{f}}_{0t}\left(C_t^-\right)\right] C_t^- - \left[\tilde{\mathbf{f}}_t\left(\mathbf{p}_t^-\right)\right] \mathbf{p}_t^- - \mathbf{f}_{0t}\left(C_t^-\right) + \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^-\right) \right\} ds \to \mathbf{max}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{V_k} \left[\tilde{\mathbf{f}}_0(C_k)\right]^T \dot{\lambda}_k dv + \int\limits_{S_{tk}} \left[\tilde{\mathbf{f}}_{0t}(C_{tk})\right]^T \dot{\lambda}_{tk}\, ds \le \Lambda_k, \qquad k = 1,2,\ldots,r, \\ \left[\tilde{\mathbf{f}}(\sigma_k)\right]^T \dot{\lambda}_k - [\mathscr{A}]^T \dot{\mathbf{u}}_k = \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_k \ge \mathbf{0} \quad \in V_k, \quad [A_s]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \in S_u, \\ \left[\tilde{\mathbf{f}}_t\left(\mathbf{p}_t^+\right)\right]^T \dot{\lambda}_t^+ + \dot{\mathbf{u}}_t^+ - \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}, \; \dot{\lambda}_t^+ \ge \mathbf{0} \; \in S_t^+, \left[\tilde{\mathbf{f}}_t\left(\mathbf{p}_t^-\right)\right]^T \dot{\lambda}_t^- + \dot{\mathbf{u}}_t^- - \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}, \; \dot{\lambda}_t^- \ge \mathbf{0} \; \in S_t^-.\end{gathered} \tag{14}$$

Условия (14) определяют область кинематически допустимых векторов скоростей перемещений. Первое неравенство в (14) означает ограничение интенсивности скоростей пластических деформаций в конечном элементе, а равенства представляют кинематические уравнения. Эта задача соответствует кинематической теореме о простом пластическом разрушении [1] и позволяет определить напряжения и скорости перемещений, отвечающие предельному состоянию и заданному критерию оптимальности тела. В случае однородных условий текучести функция цели (13) сокращается, так как третий и пятый интегралы отличаются соответсвенно от четвертого и шестого интегралов только постоянными множителями.

5. Заключение

В представленных двойственных математических моделях задач предельного равновесия учитываются возможные разрывы функций скоростей перемещений и скорость диссипации энергии в местах разрыва скоростей. Из кинематических уравнений на поверхностях S_t следуют два важных вывода: а) если $\dot{\lambda}_t = \mathbf{0} \quad \in S_t$, то на этой поверхности гарантируется непрерывность скоростей перемещений; б) если условия текучести для поверхностей S_t не составляются, то при построении двойственных математических моделей задач предполагается неразрывность скоростей перемещений и в таком случае математические модели задач не могут моделировать действительного деформированного состояния и механизма разрушения тонких пластинок и оболочек.

Результаты исследований, полученные применительно к простому разрушению, могут быть перенесены на другие виды задач упругопластического анализа и на более сложные виды повторно–переменного и подвижного нагружений.

Литература

1. А.Чирас. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнюс: Минтис, 1971. 124 с.
2. А.Чирас, А.Боркаускас, Р.Каркаускас. Теория и методы оптимизации упруго–пластических систем. Л.: Стройиздат, 1974. 280 с.
3. Ф.Ходж, Т.Белычко. Численные методы анализа предельного состояния пластин // Прикладная механика, Т. 35, 1968, Серия Е, 4, с. 192–201 (пер. с англ.).
4. А.Дехтярь, А.Рассказов. Несущая способность тонкостенных конструкций. Киев: Будивельник, 1990. 152 с.
5. С.Каланта. Двойственные математические модели задач оптимизации жестко–пластических систем конечных элементов // Строит. механика и расчет сооружений, 1983, 3, с. 11–15.

DUALŪS RIDINĖS PUSIAUSVYROS UŽDAVINIAI SU POSLINKIŲ GREIČIŲ TRŪKIAIS

S. Kalanta

S a n t r a u k a

Sudarytos standaus - plastinio kūno parametrų ir ribinės apkrovos optimizacijos uždavinių dualūs matematiniai modeliai statinėje ir kinematinėje formuluotėje. Juose takumo sąlygos tikrinamos ne tik baigtinių elementų tūryje, bet ir jų paviršiuose. To pasekoje dualiose formuluotėse įvertinami galimi poslinkių greičių trūkiai ir energijos disipacijos greitis paviršiuose tarp elementų.

DUAL LIMIT ANALYSIS PROBLEMS WITH DISCONTINUITY OF DISPLACEMENT VELOCITIES

S. Kalanta

S u m m a r y

The general dual mathematical models (static and kinematic formulations) of the limit load and rigid-plastic body parameters optimization problems are formed on the basis of extremal energy principles and theory of duality. Yield conditions are controlled not only in volume of finite elements, but also at the surfaces between elements. Therefore the possible discontinuity of displacement velocities and velocity energy dissipation between the elements are evaluated.