Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

Statyba

ISSN: 1392-1525 (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/tcem19

KUHN-TUCKER CONDITIONS IN SHAKEDOWN PROBLEMS

J. Atkočiūnas

ISSN 1392-1525. STATYBA - CIVIL ENGINEERING - СТРОИТЕЛЬСТВО, 1996, Nr. 1(5)

УСЛОВИЯ КУНА–ТАККЕРА В ЗАДАЧАХ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ

Ю.Ю. Аткочюнас

1. Постановка задачи

Напряженно–деформированное состояние (НДС) диссипативной системы в общем случае зависит от истории нагружения $\mathbf{F}(t)$ ($\mathbf{F}_{inf} \le \mathbf{F}(t) \le \mathbf{F}_{sup}$, здесь $\mathbf{F}_{inf}$, $\mathbf{F}_{sup}$ – заданные пределы изменения нагрузки). Для приспосабливающихся конструкций ее НДС в разных аспектах рассмотрено в работах [1–9] и др. Только для частного случая – для момента, близкого к разрушению идеально упругопластической приспосабливающейся конструкции, распределение действительных остаточных усилий $\mathbf{S}_r^*$ единственно для каждой из историй нагружения $\mathbf{F}_{inf} \le \mathbf{F}(t) \le \mathbf{F}_{sup}$ (в этом случае коэффициент запаса по приспособляемости близок к 1). Однако и здесь могут существовать области, где пластические деформации Θ_p равны нулю. Тогда $\mathbf{S}_r$ в статически неопределимых частях конструкции может быть неединственным: напряженное состояние обуславливается только уравнениями равновесия $[A]\,\mathbf{S}_r = \mathbf{0}$. Экстремальный энергетический принцип минимума дополнительной энергии позволяет в момент, предшествующий циклически–пластическому разрушению, из всех статически допустимых остаточных усилий определить именно $\mathbf{S}_r^*$ (поведение конструкции относится к голономному). Тогда для анализа НДС приспосабливающейся конструкции появляется возможность прямого применения построенных на основе экстремальных энергетических принципов двойственных задач математического программирования (статическая и кинематическая формулировки [7]). Встречающаяся вырожденность экстремальной задачи в статической формулировке (основные неизвестные – $\mathbf{S}_r$) указывает на невозможность однозначного определения остаточных перемещений $\mathbf{u}_r$ и деформаций Θ_r при решении задачи анализа в кинематической формулировке. При уже известном векторе $\mathbf{S}_r^*$ проблема определения пределов изменения остаточных перемещений конструкции $\mathbf{u}_{r,inf} \le \mathbf{u}_r(t) \le \mathbf{u}_{r,sup}$ представляется в качестве задачи математического программирования. Ограничениями этой задачи служат условия Куна–Таккера для задачи анализа в статической формулировке и энергетическое условие – неравенство, ограничивающее сверху общую диссипацию энергии процессов достижения состояния приспособляемости D. Упомянутое энергетическое ограничение позволяет исключить комбинаторные условия о дополняющей нежесткости и тем самым упростить решение задачи оценки остаточных перемещений.

2. Математические модели экстремальных задач анализа НДС

Дискретная модель конструкции получается расчленением ее на ζ конечных элементов с общим числом s расчетных сечений (множество их индексов I). Степень свободы m, число составляющих каждого из векторов усилий $\mathbf{S} = \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e$ и деформаций $\Theta = \Theta_r + \Theta_e$ равняется n (индекс e относится к векторам, полученным из упругого расчета). Степень статической неопределимости $k_0 = n - m$. Однако детально конечноэлементные матрицы и зависимости в настоящей статье не рассматриваются.

В качестве энергетических границ достижения состояния приспособляемости конструкции выступают минимальное значение дополнительной энергии $\min \mathscr{F}'(\mathbf{S}_r) = \min\ 0.5 \cdot \mathbf{S}_r^T [D]\, \mathbf{S}_r = a^*$ для статически допустимых остаточных усилий $\mathbf{S}_r$ и максимальное значение общей диссипации энергии D_{max} для кинематически допустимых перемещений $\mathbf{u}_r$ [8, 9]. Здесь $[D]$ – матрица податливости. Для голономных процессов диссипация энергии рассчитывается согласно формуле $D = \lambda^T \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$, λ – векторы констант и множителей пластичности для нелинейных условий текучести

$$\mathbf{f}(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e) \le \mathbf{C}. \tag{1}$$

Как известно, статически допустимый вектор $\mathbf{S}_r$ удовлетворяет уравнениям равновесия $[A]\,\mathbf{S}_r = \mathbf{0}$ и условиям текучести (1). Порядок алгебраического оператора уравнений равновесия $[A]$ есть ($m \times n$). Экстремальные упругие усилия $\mathbf{S}_{ej,max}$, $\mathbf{S}_{ej,min}$ являются линейными функциями от известных $\mathbf{F}_{inf}$, $\mathbf{F}_{sup}$. Векторы $\mathbf{S}_{ej,max}, \mathbf{S}_{ej,min}$ определяют все вершины годографа упругих усилий $\mathbf{S}_e(t)$ (через j индексируются их симметричные пары, их множество J). Так, в условиях (1) одновременно учитываются все вершины годографа

$$\mathbf{f}(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}) \le \mathbf{C}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}) \le \mathbf{C}$$

$$\text{для всех } j \in J.$$

Максимальное число вершин годографа $\overline{p} = 2^m$, множество их индексов в дальнейшем будет обозначаться через P.

Принцип минимума дополнительной энергии приводит к статической формулировке задачи приспособляемости:

найти

$$\min\ 0.5 \cdot \mathbf{S}_r^T\, [D]\mathbf{S}_r = a^* \tag{2}$$

при условиях

$$[A]\,\mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}) \le \mathbf{C}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}) \le \mathbf{C} \tag{3}$$

$$\text{для всех } j \in J.$$

Решением задачи (2)–(3) определяются вектор $\mathbf{S}_r^*$ и значение a^* (рис. 1). Вследствие положительной определенности матрицы $[D]$ и выпуклости условий текучести (3) задача (2)–(3) имеет только единственное решение $\mathbf{S}_r^*$. Общее число активных, т. е. удовлетворяющихся в качестве равенств условий текучести, не теряя общности, обозначается через k (максимальное их число равняется s, $i \in I$; при конкретном методе дискретизации могут учитываться условия на линиях стыка элементов и т.д.). В дальнейшем множество индексов активных ограничений обозначается через K. Условия Куна–Таккера для задачи минимизации (2)–(3) (найти $\min \mathscr{F}'(\mathbf{S}_r) = \min\ 0.5 \cdot \mathbf{S}_r^T [D] \mathbf{S}_r$ при ограничениях (3)) принимают вид [10]:

$$\nabla \mathscr{F}'(\mathbf{S}_r^*) + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,max})\right]^T \lambda_{j,max} + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,min})\right]^T \lambda_{j,min} - [A]^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0},$$

$$\lambda_{j,max}^T \left[\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,max})\right] = 0, \quad \lambda_{j,min}^T \left[\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,max})\right] = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_{j,max} \ge \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \ge \mathbf{0}, \quad j \in J.$$

Здесь $[\nabla \mathbf{f}]$ – матрица градиентов вектор–функций текучести (3), ее порядок ($s \times n$); $\lambda_{j,max}$, $\lambda_{j,min}$, $\mathbf{u}_r$ – векторы множителей, физический смысл которых может быть определен, исходя из кинематической формулировки задачи анализа. С учетом $\mathcal{F}'(\mathbf{S}_r) = 0.5 \cdot \mathbf{S}_r^T [D] \mathbf{S}_r$ условия Куна–Таккера принимают вид:

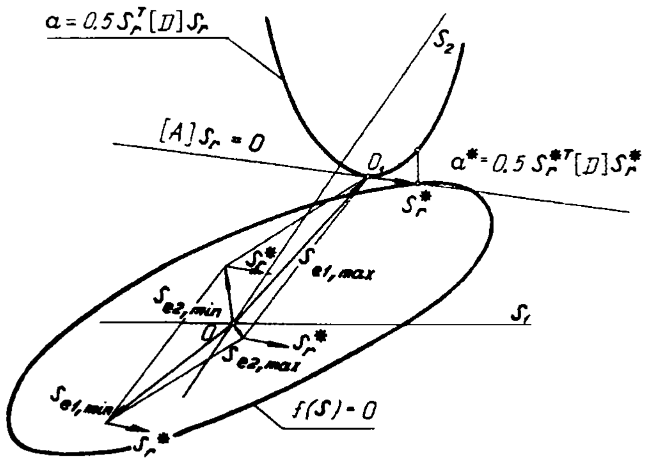

Рис. 1. К статической формулировке задачи анализа

$$
\begin{gathered}
[D]\,\mathbf{S}_r^* + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T \lambda_{j,max} + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T \lambda_{j,min} - [A]^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \\
\lambda_{j,max}^T \left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0, \quad \lambda_{j,min}^T \left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0, \qquad (5) \\
\lambda_{j,max} \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \geq \mathbf{0}
\end{gathered}
$$

для всех $j \in J$.

Принципу минимума полной потенциальной энергии отвечает кинематическая формулировка задачи анализа:

найти

$$
\begin{gathered}
\min \{0.5 \cdot \mathbf{S}_r^T [D] \mathbf{S}_r + \sum_j \lambda_{j,max}^T \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] \mathbf{S}_r + \sum_j \lambda_{j,min}^T \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right] \mathbf{S}_r + \\
+ \sum_j \lambda_{j,max}^T \left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] + \sum_j \lambda_{j,min}^T \left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]\} = -a^* \qquad (6)
\end{gathered}
$$

при условиях

$$
\begin{gathered}
[D]\,\mathbf{S}_r + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T \lambda_{j,max} + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T \lambda_{j,min} - [A]^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \\
\lambda_{j,max} \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \geq \mathbf{0} \qquad (7)
\end{gathered}
$$

для всех $j \in J$.

Условия (7) означают геометрические уравнения $[A]^T \mathbf{u}_r = \Theta_r$. Решением задачи (6)–(7) определяются $\mathbf{S}_r^*$, $\mathbf{u}_r^*$, $\lambda_{j,max}^*$, $\lambda_{j,min}^*$. Для оптимального плана задачи (6)–(7) согласно второй теореме двойственности теории математического программирования

$$\lambda_{j,max}^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^*+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]=0,\quad \lambda_{j,min}^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^*+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]=0,\quad j\in J.$$

Векторы $\mathbf{u}_r^*$, $\lambda_{j,max}^*$, $\lambda_{j,min}^*$ удовлетворяют условиям Куна–Таккера (4) (или (5)). Для достижения состояния приспособляемости диссипация энергии $D=\lambda^{*T}\mathbf{C}$, где $\lambda^*=\sum_j\left(\lambda_{j,max}^*+\lambda_{j,min}^*\right)$. Заменой знака функции цели (6) на противоположный получается двойственная пара задач математического нелинейного программирования (2)–(3), (6)–(7):

найти

$$\max\ \mathscr{F}''\left(\mathbf{S}_r,\mathbf{u}_r,\lambda\right)=\max\{-0.5\cdot\mathbf{S}_r^T[D]\mathbf{S}_r-\sum_j\lambda_{j,max}^T\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]\mathbf{S}_r-\sum_j\lambda_{j,min}^T\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]\mathbf{S}_r-$$

$$-\sum_j\lambda_{j,max}^T\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]-\sum_j\lambda_{j,min}^T\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]\}=a^*$$

при условиях (7).

Для известных $\lambda_{j,max}^*$, $\lambda_{j,min}^*$ задача (6)–(7) сводится к виду, отвечающему известному минимальному принципу Койтера [11]:

найти

$$\min\{0.5\cdot\mathbf{S}_r^T[D]\mathbf{S}_r+\sum_j\lambda_{j,max}^{*T}\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]\mathbf{S}_r+\sum_j\lambda_{j,min}^{*T}\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]\mathbf{S}_r\}=-a^* \tag{8}$$

при условиях

$$[D]\mathbf{S}_r+\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T\lambda_{j,max}^*+\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T\lambda_{j,min}^*-[A]^T\mathbf{u}_r=\mathbf{0},$$

$$\lambda_{j,max}^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]=0,\quad \lambda_{j,min}^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]=0, \tag{9}$$

$$\lambda_{j,max}^*\geq\mathbf{0},\quad \lambda_{j,min}^*\geq\mathbf{0}$$

для всех $j\in J$.

В более компактной форме задача (8)–(9) обычно представляется так:

найти

$$\min\{0.5\cdot\mathbf{S}_r^T[D]\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_r^T\Theta_p\}=-a^* \tag{10}$$

при условиях

$$[A]^T\mathbf{u}_r=[D]\mathbf{S}_r+\Theta_p\ , \tag{11}$$

где

$$\Theta_p=\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T\lambda_{j,max}^*+\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T\lambda_{j,min}^*,$$

$$\lambda_{j,max}^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]=0,\quad \lambda_{j,min}^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r+\mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]=0, \tag{12}$$

$$\lambda_{j,max}^*\geq\mathbf{0},\quad \lambda_{j,min}^*\geq\mathbf{0}$$

для всех $j\in J$.

Для заданных пластических деформаций Θ_p^* второй член функции цели (10) задачи (10)–(12) является константой $C_1 = \mathbf{S}_r^T\,\Theta_p^*$ и в конечном счете задача принимает вид:

найти

$$\min\{0.5\cdot\mathbf{S}_r^T[D]\mathbf{S}_r + C_1\} = -a^* \tag{13}$$

при условиях

$$[A]^T\mathbf{u}_r = [D]\mathbf{S}_r + \Theta_p^* \,. \tag{14}$$

3. Обобщенная задача Лагранжа

Полную систему уравнений Ойлера–Лагранжа составляют ограничения математических моделей экстремальных задач в статической (2)–(3) и кинематической (4)–(5) формулировках с учетом условий о дополняющей нежесткости:

$$[A]\mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \tag{15}$$

$$[D]\mathbf{S}_r + \Theta_p - [A]^T\mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \tag{16}$$

$$-\mathbf{C} + \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right) \le \mathbf{0}, \quad -\mathbf{C} + \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right) \le \mathbf{0}; \qquad (17$$

$$\lambda_{j,max}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0, \quad \lambda_{j,min}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0; \tag{18}$$

$$\lambda_{j,max} \ge \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \ge \mathbf{0} \tag{19}$$

для всех $j \in J$.

Здесь Θ_p – пластические деформации, входящие в уравнения (7). Векторы $\mathbf{S}_r^*$, $\mathbf{u}_r^*$, $\lambda_{j,max}^*$, $\lambda_{j,min}^*$ являются решением системы зависимостей (15)–(19), которое полностью совпадает с решением двойственной пары задач математического программирования (2)–(3), (6)–(7).

Функция

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{S}_r, \mathbf{u}_r, \lambda) = 0.5\cdot\mathbf{S}_r^T[D]\mathbf{S}_r - \mathbf{u}_r^T[A]\mathbf{S}_r - \sum_j \lambda_{j,max}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] - \\ -\sum_j \lambda_{j,min}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right], \quad \lambda_{j,max} \ge \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \ge \mathbf{0}, \quad j \in J\end{aligned} \tag{20}$$

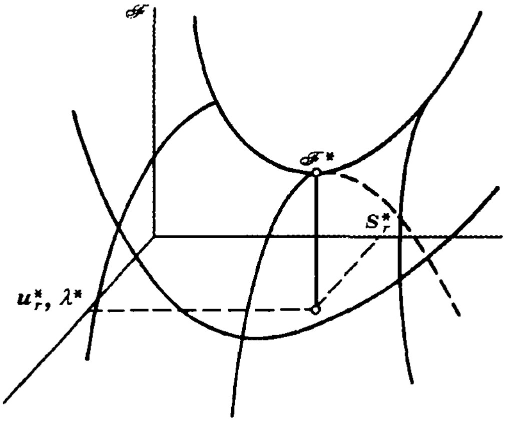

Рис. 2. Седловая функция $\mathcal{F}$

является потенциалом для системы зависимостей (15)–(19) [12]. Стационарная точка $\mathbf{S}_r^*$, $\mathbf{u}_r^*$, $\lambda_{j,max}^*$, $\lambda_{j,min}^*$ ($\lambda^* = \sum_j \left(\lambda_{j,max}^* + \lambda_{j,min}^*\right)$) функции $\mathscr{F}(\mathbf{S}_r, \mathbf{u}_r, \lambda)$ есть решение системы (15)–(19): $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}\left(\mathbf{S}_r^*, \mathbf{u}_r^*, \lambda^*\right)$. Седловая функция (20) является выпуклой относительно $\mathbf{S}_r$ и вогнутой относительно $\mathbf{u}_r$, λ (рис. 2 [10, 12]). С использованием трансформаций Лежандра [10, 12] седловая функция $\mathscr{F}(\mathbf{S}_r, \mathbf{u}_r, \lambda)$ (20) трансформируется либо только в выпуклую $\mathscr{F}'(\mathbf{S}_r)$, либо только в вогнутую $\mathscr{F}''$ функции:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}' &= \mathscr{F} - \mathbf{u}_r^T\, \delta\mathscr{F}_{,\mathbf{u}_r} - \lambda^T\, \delta\mathscr{F}_{,\lambda}, \\ \mathscr{F}'' &= \mathscr{F} - \mathbf{S}_r^T\, \delta\mathscr{F}_{,\mathbf{S}_r}. \end{aligned} \tag{21}$$

здесь $\delta\mathscr{F}_{,\mathbf{u}_r}$ $\delta\mathscr{F}_{,\lambda}$, $\delta\mathscr{F}_{,\mathbf{S}_r}$ – вариации функции $\mathscr{F}$ по $\mathbf{u}_r$, λ , $\mathbf{S}_r$. Тогда

$$\min_{\mathbf{S}_r} \max_{\mathbf{u}_r, \lambda\ge 0} \mathscr{F} = \min_{\mathbf{S}_r} \mathscr{F}' = \max_{\mathbf{u}_r, \lambda\ge 0} \mathscr{F}''$$

и двойственная пара задач математического программирования (2)–(3), (6)–(7) соответственно

<u>Статическая формулировка</u>
найти $\min \mathscr{F}'$ при условиях $\delta\mathscr{F}_{,\mathbf{u}_r} = \mathbf{0}$, $\delta\mathscr{F}_{,\lambda} \le \mathbf{0}$.

<u>Кинематическая формулировка</u>
найти $\max \mathscr{F}''$ при условиях $\delta\mathscr{F}_{,\mathbf{S}_r} = \mathbf{0}$, $\lambda \ge \mathbf{0}$.

Здесь для простоты записи привлекался только вектор $\lambda \ge \mathbf{0}$, а не векторы $\lambda_{j,max} \ge \mathbf{0}$, $\lambda_{j,min} \ge \mathbf{0}$.

4. О вырожденной задаче анализа

Для задачи (6)–(7) (или соответственно для задачи (15)–(19)), когда $k > k_0$, характерна возможность существования не одного вектора $\lambda^* \ge \mathbf{0}$, приводящего к тому же значению a^*. Следует подчеркнуть, что применяемый для решения нелинейной задачи (6)–(7) алгоритм должен способствовать выделению λ^*, приводящему к максимальному значению диссипации энергии $D_{max} = \lambda^{*T}\mathbf{C}$ [10,13]. Минимальное значение диссипации энергии D_{min} для достижения состояния приспособляемости (в том числе и в случае вырожденности задачи анализа) может быть определено решением задачи: найти min $\lambda^T\mathbf{C}$ при условиях (15)–(19). Значительным упрощением решения этой задачи был бы предварительный учет в условиях (15)–(19) известного по решению задачи (2)–(3) вектора $\mathbf{S}_r^*$. Однако задача прямого определения D_{max}: найти max $\lambda^T\mathbf{C}$ при условиях (15)–(19), в общем случае теряет смысл из–за неограниченности функции цели такой задачи.

При наличии вырожденности задачи анализа в статической формулировке из кинематической формулировки (6)–(7) однозначно определить векторы Θ_r^* , $\mathbf{u}_r^*$ не представляется возможным. Для выявления пределов изменения $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ в дальнейшем и рассматривается соответствующая задача математического программирования (задача оценки остаточных перемещений). Как отмечалось выше, решением задачи (2)–(3) (или задачи (6)–(7)) определяются активные условия текучести k и соответствующие им упругие усилия $\mathbf{S}_e^*$ (в общем случае здесь могут учитываться интегральные условия текучести и т. д.). Для всех s сечений (даже тех, в которых отсутствуют активные условия текучести) определению вектора $\mathbf{S}_e^*$ способствует правило:

$$\max_p f_i\left(\mathbf{S}_{ri}^* + \mathbf{S}_{ei,p}\right) = f_i\left(\mathbf{S}_{ri}^* + \mathbf{S}_{ei}^*\right), \quad i \in I,\ p \in P.$$

С привлечением векторов $\mathbf{S}_r^*$ и $\mathbf{S}_e^*$ определяется матрица градиентов $\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right] = \left[\nabla\mathbf{f}^*\right]$. Тогда пластические деформации Θ_p определяются значительно проще, так как из рассмотрения предварительно исключаются нулевые составляющие векторов $\lambda_{j,max}^*$, $\lambda_{j,min}^*$:

$$\Theta_p = \left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right]^T \lambda, \quad \lambda \geq \mathbf{0}, \quad \lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right] = 0. \tag{22}$$

Среди условий текучести $\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right) \leq \mathbf{C}$ k из них удовлетворяются в качестве строгих равенств (множество их индексов K). Поэтому комбинаторные условия о дополняющей нежесткости

$$\lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right] = 0$$

для них можно было бы предварительно исключить.

5. Уравнения совместности остаточных деформаций

Продолжается исследование условий Куна–Таккера (4) для задачи анализа в статической формулировке (2)–(3):

$$[D]\,\mathbf{S}_r + \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T \lambda_{j,max} + \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T \lambda_{j,min} - [A]^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0},$$

$$\lambda_{j,max}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0, \quad \lambda_{j,min}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0,$$

$$\lambda_{j,max} \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{для всех } j \in J.$$

Уравнения совместности остаточных деформаций могут быть получены из условий Куна–Таккера исключением из них остаточных перемещений $\mathbf{u}_r$ [14]:

$$[B]\Theta_p = [B_r]\,\mathbf{S}_r, \tag{23}$$

где

$$\Theta_p = \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T \lambda_{j,max} + \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T \lambda_{j,min},$$

$$\lambda_{j,max}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0, \quad \lambda_{j,min}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0,$$

$$\lambda_{j,max} \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,min} \geq \mathbf{0} \tag{24}$$

$$\text{для всех } j \in J.$$

Порядок матриц $[B]$, $[B_r]$ таков ($k_0 \times n$):

$$[B] = \left[[A'']^T\left([A']^T\right)^{-1}, \ -[\mathrm{I}]\right], \quad [B_r] = -[A'']^T\left([A']^T\right)^{-1}[D'] + [D'']. \tag{25}$$

Считается, что квадратная порядка ($m \times m$) матрица $[A']^T$ выбрана таким образом, что существует ее обратная (матрица $[D']$ отвечает матрице $[A']^T$).

Принцип минимума дополнительной энергии (или двойственный ему принцип минимума полной потенциальной энергии) и уравнения совместности остаточных деформаций тождественны между собой :

$$[B]\Theta_p = \left[B_r\right]\mathbf{S}_r^*,$$

$$\Theta_p = \left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right]^T \lambda,\quad \lambda \geq \mathbf{0},\quad \lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right] = 0. \tag{26}$$

Анализ полученных уравнений (26) продолжается с принятия в них λ:

$$\left[B_\lambda^*\right]\lambda = \left[B_r\right]\mathbf{S}_r^*,\quad \lambda \geq \mathbf{0}, \tag{27}$$

$$\lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right] = 0. \tag{28}$$

Здесь $\left[B_\lambda^*\right] = [B]\left[\nabla\mathbf{f}^*\right]^T$, ее порядок ($k_0 \times s$). Неизвестными в системе зависимостей (27)−(28) являются векторы $\lambda \geq \mathbf{0}$. В результате анализа (27)−(28) становится очевидным цель определения вектора $\mathbf{S}_e^*$, а именно: при формировании уравнений совместности заранее из рассмотрения исключается значительная часть условий текучести, не относящихся к числу активных. Вследствие этого порядок матрицы $\left[B_\lambda^*\right]$ есть ($k_0 \times s$), а не ($k_0 \times \bar{p} \times s$). Если число активных условий текучести $k = s$ ($K = I$), то из системы (27)−(28) можно исключить условия (28). В итоге получается

$$\left[B_\lambda^*\right]\lambda = \left[B_r\right]\mathbf{S}_r^*,\quad \lambda \geq \mathbf{0}.$$

Вырожденность задачи (2)−(3), как отмечено выше, может иметь место, если $k > k_0$, т. е. если число активных условий текучести превышает степень статической неопределимости конструкции. В этом случае любое решение $\lambda \geq \mathbf{0}$ системы (27)−(28) всегда удовлетворяет получаемому из зависимости

$$\mathbf{S}_r^{*T}[A]^T\mathbf{u}_r = \mathbf{S}_r^{*T}[D]\,\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_r^{*T}\theta_p$$

энергетическому равенству $-\mathbf{S}_r^{*T}\theta_p = 2a^*$. В теории математического программирования энергетическое равенство $-\mathbf{S}_r^{*T}\theta_p = 2a^*$ носит название “первой теоремы двойственности”. Следовательно, энергетическая граница приспособляемости a^* для определения векторов $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ с привлечением только геометрических уравнений (7) самостоятельного значения не имеет. Только каждый из $\bar{\nu}$ **базисных векторов** $\lambda_\nu^* \geq \mathbf{0}$ системы (27)−(28) отвечает состоянию приспособляемости конструкции и энергетическому ограничению $\lambda_\nu^{*T}\mathbf{C} \leq D_{max}$, $\nu = 1, 2, \ldots, \bar{\nu}$. Очевидно, что число ненулевых составляющих для каждого базисного вектора λ_ν^* не превышает степени статической неопределимости конструкции k_0. Только в этом случае диссипация энергии для достижения состояния приспособляемости D ограничена сверху. После разработки системы уравнений (27)−(28) рассмотренная в подразделе 4 задача определения D_{min} может быть представлена так:

найти

$$\min \lambda^T\mathbf{C}$$

при условиях

$$\left[B_\lambda^*\right]\lambda = \left[B_r\right]\mathbf{S}_r^*,\quad \lambda \geq \mathbf{0},\quad \lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_e^*\right)\right] = 0.$$

Это учитывалось в наших исследованиях [14] при построении математических моделей задач оптимизации в условиях приспособляемости с учетом как прочностных, так и жесткостных ограничений.

И еще о системе зависимостей (26). Математическая модель задачи анализа в статической формулировке (2)−(3) значительно упрощается, если предварительно из условий−ограничений исключаются уравнения равновесия $[A]\,\mathbf{S}_r = \mathbf{0}$ $\left([A']\,\mathbf{S}'_r + [A'']\,\mathbf{S}''_r = \mathbf{0}\right)$:

найти

$$\min\ 0.5\cdot \mathbf{S}''^{T}_r \left[\widetilde{D}\right] \mathbf{S}''_r = a^* \tag{29}$$

при условиях

$$\mathbf{f}\left(-[B]\,\mathbf{S}''_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right) \le \mathbf{C},\quad \mathbf{f}\left(-[B]\,\mathbf{S}''_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right) \le \mathbf{C} \tag{30}$$

для всех $j \in J$.

Здесь $\left[\widetilde{D}\right] = [B][D][B]^T$, а вектор $\mathbf{S}_r = -[B]^T\,\mathbf{S}''_r$. Условия Куна−Таккера для задачи (29)−(30) принимают вид:

$$\left[\widetilde{D}\right]\mathbf{S}''^{*}_r + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}''\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right]^T \lambda_{j,max} + \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}''\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}_{ej,min}\right)\right]^T \lambda_{j,min} = \mathbf{0}, \tag{31}$$

$$\begin{gathered}\lambda^T_{j,max}\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0,\quad \lambda^T_{j,min}\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}_{ej,max}\right)\right] = 0,\\ \lambda_{j,max} \ge \mathbf{0},\quad \lambda_{j,min} \ge \mathbf{0}\end{gathered} \tag{32}$$

для всех $j \in J$.

Здесь $[\nabla \mathbf{f}'']$ − матрица градиентов вектор−функций текучести (30) при наличии неизвестных $\mathbf{S}''_r$; ее порядок $(s \times k_0)$. С учетом вектора $\mathbf{S}^*_e$ условия Куна−Таккера (31)−(32) представляются так:

$$\left[\widetilde{D}\right]\mathbf{S}''^{*}_r + \left[\nabla \mathbf{f}''\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right]^T \lambda = \mathbf{0}, \tag{33}$$

$$\lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right] = 0,\ \lambda \ge \mathbf{0}\,. \tag{34}$$

Уравнения (33)−(34) представляют собой зависимости (26), так как

$$-\left[\nabla \mathbf{f}''\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right]^T \lambda = [B]\left[\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{S}^*_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right]^T \lambda\ ,$$

$$\left[B_r\right]\mathbf{S}^*_r = -\left[B_r\right][B]^T\,\mathbf{S}''^{*}_r = \left[\widetilde{D}\right]\mathbf{S}''^{*}_r$$

и нетрудно заметить, что

$$\left[B^*_\lambda\right] = -\left[\nabla \mathbf{f}''\left(-[B]\,\mathbf{S}''^{*}_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right]^T.$$

В заключении подраздела матрица $[B]$ основных уравнений совместности деформации Θ строится с привлечением известных в линейной алгебре правосторонней псевдообратной матрицы $\left[A_p\right]^{-1}$ и матрицы ядра $\left[A^0_p\right]$. Статически возможный вектор усилий $\mathbf{Q}$ для уравнений равновесия

$\left[A_q\right]\mathbf{Q}=\mathbf{F}$ (порядок матрицы $\left[A_q\right]$ есть $(m\times\tilde{n})$, $\tilde{n}\ge n$) выражается так: $\mathbf{Q}=\left[A_p\right]^{-1}\mathbf{F}+\left[A_p^0\right]\mathbf{Q}''$.

Здесь

$$[B]=\left[[A'']^T\left([A']^T\right)^{-1},\ -[\mathrm{I}]\right],\quad \left[A_p\right]^{-T}=\left[[A'']^T\left([A']^T\right)^{-1},\ -[\mathrm{I}]\right].$$

Тогда последовательность операторных действий:

$$\left[A_q\right]\left(\left[A_p\right]^{-1}\mathbf{F}+\left[A_p^0\right]\mathbf{Q}''\right)=\mathbf{F},\quad \left[A_q\right]\left[A_p^0\right]\mathbf{Q}''=\mathbf{0}$$

с учетом того, что $\left[A_q\right]\left[A_p^0\right]=[0]$ и $\left[A_p^0\right]^T\left[A_q\right]^T\mathbf{u}=\mathbf{0}$, приводит к основному уравнению совместности деформаций $\left[A_p^0\right]^T\Theta=\mathbf{0}$. Нетрудно заметить, что $-\left[A_p^0\right]^T=[B]$. В рамках допущения о малых перемещениях матрица $\left[A_p^0\right]$ не зависит от стадии работы конструкции. Следовательно, в качестве составляющих вектора Θ могут (в контексте согласования с вектором $\mathbf{Q}$) выступить упругие, остаточные, суммарные, в том числе и связанные с жестким перемещением, деформации конструкции.

6. Математические модели задач оценки остаточных перемещений

Вначале рассматриваются геометрические уравнения

$$[A]^T\mathbf{u}_r^*=[D]\,\mathbf{S}_r^*+\Theta_p^*\ ,\tag{36}$$

где

$$\Theta_p^*=\left[\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^*+\mathbf{S}_e^*\right)\right]^T\lambda^*,\quad \lambda^*\ge 0,\quad \lambda^{*T}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_r^*+\mathbf{S}_e^*\right)\right]=0$$

конструкции, приспособившейся к заданному повторно–переменному нагружению $\mathbf{F}_{inf}\le\mathbf{F}(t)\le\mathbf{F}_{sup}$. Определение остаточного перемещения u_{ri}^*, $i=1,2,\ldots,m$ приспособившейся конструкции при единственном распределении $\mathbf{S}_r^*$, Θ_p^* основывается на известной теореме Бетти: а именно, к заданной конструкции по i–му направлению прикладывается единичная сила $\overline{F}_i=1$, обуславливающая возникновение в ней упругих усилий $\mathbf{S}_e$. Умножением обеих сторон уравнений (36) на вектор $\mathbf{S}_e$ получается

$$u_{ri}^*=\mathbf{S}_e^T[D]\mathbf{S}_r^*+\mathbf{S}_e^T\,\Theta_p^*=\mathbf{S}_e^T\,\Theta_p^*,\tag{37}$$

так как $\mathbf{S}_e^T[D]\mathbf{S}_r^*=0$. Поступая аналогичным образом, в конечном счете для всех u_{ri}^*, $i=1,2,\ldots,m$ получается зависимость:

$$\mathbf{u}_r^*=[\alpha]^T\,\Theta_p^*=\left[\overline{H}\right]\Theta_p^*.\tag{38}$$

Здесь $[\alpha]$ – матрица влияния усилий упругого расчета конструкции; $\left[\overline{H}\right]=[\alpha]^T$ – матрица влияния остаточных перемещений. С другой стороны, зависимость (38) для известных деформаций Θ_p^* может быть получена (как и формула для определения $\mathbf{S}_r^*$ [14]) из системы уравнений (15)–(16):

$$\mathbf{u}_r^*=\left([A][D]^{-1}[A]^T\right)^{-1}[A][D]^{-1}\,\Theta_p^*=[\alpha]^T\,\Theta_p^*,\tag{39}$$

$$\mathbf{S}_r^* = \left\{[D]^{-1}[A]^T\left([A][D]^{-1}[A]^T\right)^{-1}[A][D]^{-1} - [D]^{-1}\right\}\Theta_p^* = \left\{[\alpha][A][D]^{-1} - [D]^{-1}\right\}\Theta_p^* = \left[\overline{G}\right]\Theta_p^*.$$

Возвращаясь к теореме Бетти, следует отметить, что единичная сила $\overline{F}_i = 1$ может действовать как на заданную конструкцию, так и на основную систему метода сил или даже на систему с частично сниженной степенью статической неопределимости k_0 (статически квазиопределимая система). В последних двух случаях вектор статически возможных упругих усилий от единичной силы обозначается через $\overline{\mathbf{S}}_e$ и

$$u_{ri}^* = \overline{\mathbf{S}}_e^T[D]\mathbf{S}_r^* + \overline{\mathbf{S}}_e^T\,\Theta_p^*. \qquad (40)$$

Здесь для систем, согласованных с вектором Θ_p^*, член $\overline{\mathbf{S}}_e^T\,\Theta_p^*$ может быть равен нулю. Для вектора $\mathbf{u}_r^*$ в целом формула (40) принимает вид

$$\mathbf{u}_r^* = [\overline{\alpha}]^T[D]\,\mathbf{S}_r^* + [\overline{\alpha}]^T\Theta_p^*. \qquad (41)$$

Матрица $[\overline{\alpha}]^T$ отличается от $[\alpha]^T$ наличием в ней нулевых столбцов (для статически определимой системы $[\overline{\alpha}] = \left[A_p\right]^{-1}$). Из формулы (41) формально нетрудно получить зависимость (38). С этой целью правая сторона формулы (41), используя выражение $\mathbf{S}_r^*$ по зависимости (39), сводится к виду:

$$[\overline{\alpha}]^T[D]\left\{[D]^{-1}[A]^T\left([A][D]^{-1}[A]^T\right)^{-1}[A][D]^{-1} - [D]^{-1}\right\}\Theta_p^* + [\overline{\alpha}]^T\Theta_p^* = [\alpha]^T\Theta_p^*.$$

Формула (41) может быть интерпретирована и в контексте геометрических уравнений (36):

$$\mathbf{u}_r^* = \left([A']^T\right)^{-1}[D']\,\mathbf{S}_r^* + \left([A']^T\right)^{-1}\Theta_p'^*. \qquad (42)$$

Формула (42) позволяет обосновать получение компьютерных ресурсов из–за снижения размеров соответствующих матриц (исключение нулевых столбцов в матрицах по системе (41)).

Делается обобщение. Уравнения метода сил $\left[\beta_q\right]\mathbf{S}'' + \left[\beta_p\right]\mathbf{F} = \mathbf{0}$ позволяют определить $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = [\alpha]\mathbf{F} = \left(\left[A_p\right]^{-1} - \left[A_p^0\right]\left[\beta_q\right]^{-1}\left[\beta_p\right]\right)\mathbf{F}, \quad \text{где} \quad \left[\beta_q\right] = \left[A_p^0\right]^T[D]\left[A_p^0\right], \quad \left[\beta_p\right] = \left[A_p^0\right]^T[D]\left[A_p\right]^{-1},$$

а исходные уравнения равновесия $[A]\,\mathbf{S} = \mathbf{F}$. Используя полученное выражение матрицы влияния $[\alpha]$, вышеприведенные выводы относительно перемещений могут быть получены, исходя из определений матриц $\left[A_p\right]^{-1}$, $\left[A_p^0\right]$.

Если для состояния приспособляемости вектор Θ_p^* – единственный (задача (2)–(3) невырождена), составляющие вектора $\mathbf{u}_r^*$ согласно формулам (36) или (42) определяются единственным образом и не зависят от подбора матрицы $[A']^T$.

В случае вырожденности задачи анализа определяются только пределы изменения $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ остаточных перемещений $\mathbf{u}_r = \left[H^*\right]\lambda$ в момент, предшествующий циклически–пластическому разрушению приспособившейся конструкции. Здесь $\left[H^*\right] = [\alpha]^T\left[\nabla\mathbf{f}^*\right]$ – матрица влияния остаточных перемещений, приуроченная к вектору пластических множителей $\lambda \geq 0$. Базисный вектор пластических множителей $\lambda^*_\nu \geq 0$ системы (27)−(28) отвечает статически определимой (квазиопределимой) системе. Для отдельных составляющих векторов $\mathbf{u}^*_{r,inf}$, $\mathbf{u}^*_{r,sup}$ следует выделить наиболее "податливые" статически определимые (или квазиопределимые) системы. Поэтому для каждого базисного вектора $\lambda^*_\nu \geq 0$ системы (27)−(28) определяются векторы $\mathbf{u}^*_{r,\nu} = \left[H^*\right]\lambda^*_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots,\bar{\nu}$. Простым перебором составляющих по всем векторам $\mathbf{u}^*_{r,\nu}$ определяются векторы пределов изменения остаточных перемещений $\mathbf{u}^*_{r,inf}$, $\mathbf{u}^*_{r,sup}$. Такой же результат получается решением следующей задачи математического программирования для каждой i −й составляющей вектора перемещений u_{ri}:

найти

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\mathbf{H}^*_i\lambda^* = \begin{bmatrix} u^*_{ri,sup} \\ u^*_{ri,inf}\end{bmatrix}, i = 1,2,\ldots,m \tag{43}$$

при условиях

$$\left[B^*_\lambda\right]\lambda^* = \left[B_r\right]\mathbf{S}^*_r,\quad \lambda^* \geq \mathbf{0},\quad \lambda^{*T}\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}^*_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right] = 0. \tag{44}$$

Неизвестными здесь являются **базисные векторы** $\lambda^*_\nu \geq 0$ (в противном случае $D \to \infty$ и функция цели (43) задачи (43)−(44) будет не ограничена). Приведенная методика корректного решения вырожденной задачи анализа трудоемка в связи с многоразовым определением базисных векторов λ^*_ν.

Пределы $\mathbf{u}_{r,inf}, \mathbf{u}_{r,sup}$ такие, что $\mathbf{u}_{r,inf} \leq \mathbf{u}^*_{r,inf} \leq \mathbf{u}_r(t) \leq \mathbf{u}^*_{r,sup} \leq \mathbf{u}_{r,sup}$, определяются одноразовым решением задач:

найти

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\mathbf{H}^*_i\lambda = \begin{bmatrix} u_{ri,sup} \\ u_{ri,inf}\end{bmatrix}, i = 1,2,\ldots,m \tag{45}$$

при условиях

$$\left[B^*_\lambda\right]\lambda = \left[B_r\right]\mathbf{S}^*_r,\quad \lambda \geq \mathbf{0},\quad \lambda^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}^*_r + \mathbf{S}^*_e\right)\right] = 0,\quad \lambda^T\mathbf{C} \leq D_{max}. \tag{46}$$

Если оптимальному плану задачи (45)−(46) отвечает по своей сути не базисный вектор λ (число ненулевых составляющих этого вектора может быть больше степени статической неопределимости конструкции k_o), это означает, что уравнения совместности деформаций в некоторой степени нарушены. С учетом того, что k из условий текучести в (46) удовлетворяются в качестве строгих равенств, математическая модель (45)−(46) для вырожденной задачи анализа представляется такой:

найти

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\mathbf{H}^*_i\lambda = \begin{bmatrix} u_{ri,sup} \\ u_{ri,inf}\end{bmatrix},\quad i = 1,2,\ldots,m \tag{47}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\left[B^*_\lambda\right]\lambda = \left[B_r\right]\mathbf{S}^*_r,\quad \lambda \geq \mathbf{0},\\ \lambda \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_s\}^T,\quad \lambda_j \cdot \left[C_j - f_j\left(\mathbf{S}^*_{rj} + \mathbf{S}^*_{ej}\right)\right] = 0,\\ \lambda^T\mathbf{C} \leq D_{max},\ j = k+1,\ k+2, \ldots, s.\end{gathered} \tag{48}$$

Нетрудно заметить, что первые k составляющих вектора λ относятся к активным условиям текучести. Если в качестве неизвестных принять только ненулевые составляющие вектора пластических множителей $\lambda \geq \mathbf{0}$, то задача (47)—(48) еще упрощается:

найти

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \overline{\mathbf{H}}_i^* \overline{\lambda} = \begin{bmatrix} u_{ri,sup} \\ u_{ri,inf} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,\dots,m \tag{49}$$

при условиях

$$\left[\overline{B}_\lambda^*\right] \overline{\lambda} = [B_r] \mathbf{S}_r^*, \quad \overline{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\lambda}^T \overline{\mathbf{C}} \leq D_{max}. \tag{50}$$

Здесь вектор $\overline{\lambda} \equiv \left\{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_k\right\}^T$ (к нему и приурочена матрица $\left[\overline{H}^*\right]$). Размеры матрицы $\left[\overline{B}_\lambda^*\right]$ в таком случае ($k_o \times k$), так как из матрицы $\left[B_\lambda^*\right]$ предварительно исключены столбцы, отвечающие текущему индексу j по зависимостям (48). Однако в этом случае возможно появление линейно зависимых строк для матрицы $\left[\overline{B}_\lambda^*\right]$. В случае, когда $k = s$, задача (45)—(46) (как и задача (43)—(44)) принимает более простой вид:

найти

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \mathbf{H}_i^* \lambda = \begin{bmatrix} u_{ri,sup} \\ u_{ri,inf} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,\dots,m \tag{51}$$

при условиях

$$\left[B_\lambda^*\right] \lambda = [B_r]\, \mathbf{S}_r^*, \quad \lambda \geq \mathbf{0}, \quad \lambda^T \mathbf{C} \leq D_{max}. \tag{52}$$

В математической модели (51)—(52) порядок матрицы $\left[B_\lambda^*\right]$ не меняется, т.е. ($k_o \times s$). Следует отметить, что в случае, когда $k = s$, рассматривается равнопластическая приспосабливающаяся конструкция.

7. Заключение

Задача определения остаточных перемещений, предшествующих моменту циклически—пластического разрушения идеально упругопластической конструкции, в статье формулируется как проблема теории нелинейного математического программирования. В случае вырожденности задачи анализа в статической формулировке для оценки пределов изменения остаточных перемещений решается дополнительная задача линейного программирования. В качестве ограничений в этой задаче выступают уравнения совместности остаточных деформаций для приспосабливающихся конструкций, представляющие собой известные из теории математического программирования условия Куна—Таккера и энергетическое условие состояния приспособляемости. Уравнения совместности деформаций позволяют корректно интерпретировать физическую сторону построенных математических моделей оценки пределов изменения остаточных перемещений конструкции.

На основании материала настоящей статьи выявляются новые возможности и для анализа НДС неголономного поведения упругопластической конструкции. В тех случаях, когда коэффициент запаса по приспособляемости больше 1, для оценки остаточных перемещений можно искусственно создать ситуацию вырожденной задачи анализа в состоянии приспособляемости. Для этого создается фиктивная равнопластическая система голономного поведения. Перемещениями фиктивной системы "огибаются" перемещения действительной (исходной) конструкции при действии повторно—переменных нагружений. Однако это предмет исследований, выходящих за рамки настоящей статьи.

Литература

1. A. Čyras. Mathematical Models for the Analysis and Optimization of Elastoplastic Structures. New York: John Wiley, 1983. 121 p.
2. D.A. Gokhfeld, O.F. Cherniavsky. Limit Analysis of Structures at Thermal Cycling. Sijthoff and noordhoff, 1980. 263 p.
3. J. A. König. Shakedown of Elastic-Plastic Structures. Warsawa: PWN, 1987. 214 p.
4. A. R. S. Ponter. An upper bound to the small displacements of elastic perfectly plastic structures // J. Appl. Mech., 1972, Vol. **39**, p. 959-963.
5. C. Polizzotto. On the Conditions to Prevent Plastic Shakedown of Structures: Part I - Theory // J. Appl. Mech., 1993, Vol. **60**, p. 15-19.
6. F.Giambanco and L.Palizzolo. Bounds on plastic deformations of trusses. // Int. J. Solids Structures, 1994, Vol. **31**, Nr.6, p. 785-795.
7. J. Atkočiūnas. New Approach to the Koiter's Inequality for Shakedown // Mech. Res. comm., 1993, Vol. **20**, p. 301-308.
8. Ю. Аткочюнас. Верхняя граница общей диссипации энергии приспособляющихся стистем // Изв. вузов. Строительство, **6**. М., 1993, с. 89–92.
9. J. Atkočiūnas and A. Norkus. Method of Fictitious System for Evaluation of Frame Shakedown displacements // Computers & Structures, 1994, Vol **50**, Nr 4, p. 563-567.
10. Mokhtar S. Bazaraa, C.M. Shetty. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. New York , Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley, 1979. 283 p.
11. W. Koiter. General theorems for elastic-plastic solids // Progress in Solid Mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1960, p. 165-221.
12. A. Borkowski. Analysis of Skeletal Structural Systems in the Elastic and Elastic-Plastic Ranges. Warszawa: PWN - Elsevier, 1988. 200 p.
13. J.Atkočiūnas. Tampriųjų-plastinių konstrukcijų analizės išsigimusieji uždaviniai. Vienas iš korektiškų sprendimų // 4-osios tarp. konf. "Naujos statybinės medžiagos, konstrukcijos ir technologijos", įvykusios Vilniuje 1995 m. gegužės 10-13 d., straipsniai. III tomas. Vilnius: Technika, 1995, p. 137-142.
14. Ю. Аткочюнас. Расчет упругопластических систем при повторных нагружениях. Вильнюс: Издательство науки и энциклопедий, 1994. 148 p.

Įteikta 1996 01 25

KUNO- TAKERIO SĄLYGOS PRISITAIKOMUMO UŽDAVINIUOSE

J. Atkočiūnas

S a n t r a u k a

Nagrinėjama idealiai tampriai plastinė, prisitaikanti prie kintamos-kartotinės apkrovos, konstrukcija. Konstrukcijos įtempimų-deformuoto būvio prieš pat ciklinį-plastinį suirimą (prisitaikomumo atsargos koeficientas artimas vienetui) analizė pateikiama kaip netiesinio matematinio programavimo uždavinys. Sudarant netiesinio programavimo dualių uždavinių porą (statinė ir kinematinė analizės uždavinio formuluotės) diferencialinės priklausomybės yra ignoruojamos arba pakeičiamos algebrinėmis sąlygomis. Esant atsargos koeficientui artimam vienetui, dažnai gaunamas išsigimęs statinės formuluotės analizės uždavinys. Šiam atvejui siūlomas prisitaikymo poslinkių viršutinių ribų nustatymo uždavinio matematinis modelis. Parodyta, jog žinomos matematinio programavimo teorijoje Kuno-Takerio sąlygos (liekamųjų deformacijų darnos lygtys) kartu su energijos pilnos disipacijos maksimalią reikšmę ribojančia sąlyga formuoja konstrukcijos prisitaikomumo duotai ciklinei apkrovai sąlygas. Kuno-Takerio sąlygos, naudojamos minėtame poslinkių įvertinimo uždavinyje, įgalina korektiškai interpretuoti išsigimusio prisitaikomumo analizės uždavinio fizinę prasmę.

KUHN-TUCKER CONDITIONS IN SHAKEDOWN PROBLEMS

J.Atkočiūnas

S u m m a r y

An elastic perfectly plastic structure at shakedown to given cyclic loading is under consideration. The stress-strain field of dissipative system in general is related to the history of loading. And only in a particular case, i.e. at the moment prior to the failure of an elastic perfectly plastic structure the distribution of the actual residual forces is unique for each prescribed history of loading (the safety factor of shakedown approaches unity). Nevertheless, there exist some domains

where the plastic strains are equal to zero. The residual forces in the statically indeterminate parts of the structure may be non-unique: the stress field is only determined by the equilibrium equations. The extremum energy principle of minimum complementary energy allows to derive the actual residual forces out of all statically admissible residual forces at the moment prior to cyclic plastic failure. Then the stress-strain field analysis problem at the moment prior to the cyclic plastic failure is formulated as a problem of non-linear mathematical programming. Formulating the dual pair of non-linear programming problem (statical and kinematic formulation of analysis problem) the differential constraints are neglected or replaced by algebraic conditions. When the safety factor is approching a unity, the degeneracy of the statical formulation of the analysis problem often can occur. In this case a mathematical model is proposed for obtaining an upper bounds for the displacement at shakedown. It is pointed out that the known Kuhn-Tucker conditions of mathematical programming theory (i.e. compatibility equations of residual strains) in concert with restriction, limiting the maximum value of total energy dissipation, make up the adaptation conditions of the structure to given cyclic loading. Kuhn-Tucker conditions used in above - mentioned problem allow to correctly interprete the physical aspect of the degeneracy problem at shakedown.

When the safety factor is larger than unity an artificial degeneracy situation for the statical formulation of analysis problem can be created. Then the mathematical models presented can be applied to the analysis of unloading elastoplastic structures. With this aim in view a fictitious equiplastic structure the behaviour of which is holonomic is derived. The displacements of the fictitious structure enclose the displacements of the actual structure subject to cyclic loading.