

## MULTISURFACE PLASTICITY MODELS UNDER YIELDING CONDITIONS

D. Hintze & J. Will

To cite this article: D. Hintze & J. Will (1999) MULTISURFACE PLASTICITY MODELS UNDER YIELDING CONDITIONS, *Statyba*, 5:5, 329-334, DOI: [10.1080/13921525.1999.10531484](https://doi.org/10.1080/13921525.1999.10531484)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1999.10531484>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 99

---

## MULTISURFACE-PLASTIZITÄTS- MODELLE MIT ZUSAMMENGESETZTEN FLIESSBEDINGUNGEN

D. Hintze und J. Will

### 1. Einleitung

In der Geotechnik werden zunehmend räumliche Strukturberechnungen zur Ermittlung der Standsicherheit z.B. von Tunnelbauwerken, Baugruben oder Talsperren eingesetzt. Das erfordert neben einem verstärkten Aufwand bei der Ermittlung der felsmechanischen Kennwerte auch die Erarbeitung leistungsfähiger numerischer Werkzeuge, die das Verformungs- und Festigkeitsverhalten wirklichkeitsnah erfassen können. Gesucht sind realitätsnahe Materialmodelle, zur Berücksichtigung der wesentlichen Eigenschaften wie Plastifizierungen und/oder anderer Schädigungserscheinungen. Nach Wittke [1] ist „Fels innerhalb eines bestimmten Homogenbereiches ein durch eine oder mehrere Scharen annähernd ebener, zueinander paralleler Trennflächen zerteilter homogener Festkörper, der ein richtungsloses, flächiges oder lineares Gefüge haben kann. Störungen treten in der Regel als Einzelemente auf.“ (Abb. 1). In seinem Spannungs-Verformungs-verhalten zeigt geklüfteter Fels sowohl Phänomene eines Kontinuums als auch eines Diskontinuums. Nachfolgend wird die numerische Verarbeitung eines verschmierten elasto-plastischen Kontinuummodells für das geklüftete Gebirge mit impliziten Berechnungsstrategien vorgestellt.

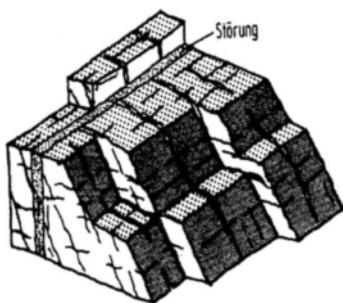


Abb 1. Trennflächengefüge

Fig 1. Jointed rock mass

### 2. Numerische Verarbeitung der zusammengesetzten Fließbedingungen

Mit Hilfe eines verschmierten, multilaminaren Ersatzkontinuum wird der intakte Fels und ein Trennflächengefüge mit bis zu vier unterschiedlich im Raum orientierten Trennflächenscharen beschrieben. Wir beschränkten uns zunächst auf die Abbildung elastisch-idealplastischen Verformungsverhaltens ohne Ver- und Entfestigungsfunktionen. Als Fließbedingung wird das als Grundmodell der Geotechnik bezeichnete MOHR-COULOMB-Schubspannungskriterium mit einer Zugspannungsbegrenzung sowohl für den intakten Fels als auch für jede Trennfläche verwendet. Für Zugbruch werden assoziierte, für Schubbruch assoziierte oder nicht-assozierte Fließregeln verwendet. Nach Überschreiten der Anfangsfestigkeiten können Restfestigkeiten zugewiesen werden. Damit wird es möglich, das nichtlineare Spannungs-Verformungs-verhalten mit sehr wenigen, praxisbekannten Parametern, wie Zugfestigkeit, Reibungswinkel und Kohäsion, zu beschreiben. Zusätzlich ist die Berücksichtigung weiterer Effekte wie Dilatanz oder Restfestigkeiten möglich. Damit wird die mehrflächige Fließfigur aus 10 Fließbedingungen, zwei isotropen für den intakten Fels und jeweils zwei anisotropen für die vier Trennflächenscharen zusammengesetzt.

In der Literatur unterscheidet man bei der numerischen Umsetzung mehrflächiger Fließfiguren grundsätzlich zwischen unabhängiger und abhängiger Bearbeitung. Bei unabhängiger Bearbeitung werden alle Fließbedingungen entweder getrennt voneinander bearbeitet [1, 2], dominante Fließbedingungen definiert oder eine Bearbeitungsreihenfolge festgelegt. In jedem Fall berücksichtigt man keine Interaktionen von Fließkriterien bei der Ermittlung der plastischen Multiplikatoren, wie das bei der abhängigen Bearbeitung [3, 4] mehrflächiger Plastizität der Fall ist. Dort betrachtet man nicht die Fließkriterien einzeln, sondern die mehrflächige Fließ-

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right)^T D d\varepsilon &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right)^T D \lambda_1 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right)^T D \lambda_2 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \sigma}\right), \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)^T D d\varepsilon &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)^T D \lambda_1 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)^T D \lambda_2 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \sigma}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

figur insgesamt. Die abhängigen plastischen Multiplikatoren  $\lambda_j$  müssen dann aus einem Gleichungssystem ermittelt werden Gl.(1), (2). Im Gegensatz zur Bearbeitung einzelner Fließbedingungen ist bei der Verletzung mehrerer Fließbedingungen durch den Versuchsspannungszustand die Fließflächen-überschreitung keine hinreichende Bedingung für die Aktivität der Fließbedingung mehr. Dieses Phänomen soll an einem Kreuzungsbereich von zwei anisotropen Fließbedingungen einer Trennfläche, einem Mohr-Coulombschen Schubbruchkriterium mit einer Zugspannungsbegrenzung (Abb. 2), näher erläutert werden. Verletzt der Versuchsspannungszustand beide Fließbedingungen, ergeben sich die abhängigen plastischen Multiplikatoren aus Gl. (1).

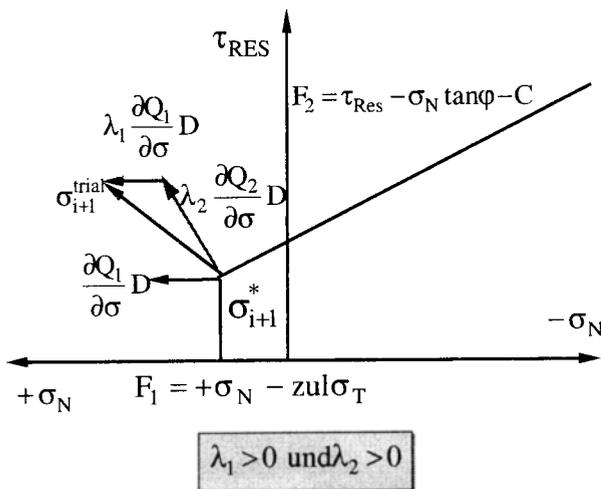


Abb. 2. Aktivität Fließbedingungen möglich

Fig 2. Activities of both yield functions are possible

Die Erfüllung beider Konsistenzbedingungen erzwingt eine Spannungsrückführung in den Kreuzungspunkt der Fließkriterien. Die plastischen Dehnungen ergeben sich aus der Linearkombination der plastischen Dehnungsvektoren beider Fließbedingungen.

Die Richtung der plastischen Dehnungsvektoren wird durch die Gradienten der plastischen Potentiale, die Länge durch die Multiplikatoren  $\lambda_j$  beschrieben. Sind dabei die plastischen Multiplikatoren positiv, bleiben die Richtungen der plastischen Dehnungen erhalten (Abb. 2).

Ergibt die Lösung des Gleichungssystems (1) negative plastische Multiplikatoren, kehrt sich die Richtung der plastischen Dehnungsinkremente um (Abb. 3). Es muß Energie aufgewendet werden, um zulässige Spannungszustände in den Kreuzungspunkt von zwei Fließbedingungen zu zwingen. Eine Aktivität beider Fließbedingungen ist dann nicht sinnvoll. Simo [5] führt deshalb neben der Fließflächenüberschreitung als weitere Bedingung, die Aktivität von Fließbedingungen ein. Für beliebig mehrflächige Plastizität müssen die plastischen Multiplikatoren dann aus dem Gleichungssystem (2) mit Einschränkung des Wertebereiches bestimmt werden. Verletzt der Versuchsspannungszustand j-Fließbedingungen, ergibt sich ein Gleichungssystem von  $n = j$  Gleichungen, mit  $\lambda_j \geq 0$ .

$$\left(\frac{\partial F_n}{\partial \sigma}\right)^T D d\varepsilon = \sum_{j=1}^{\text{Set aktiver F}} \left(\frac{\partial F_n}{\partial \sigma}\right)^T D \lambda_j \left(\frac{\partial Q_j}{\partial \sigma}\right). \quad (2)$$

Die Annahme der Aktivität muß für alle verletzten Fließbedingungen überprüft werden. Negative plastische Multiplikatoren sind zu eliminieren. Die Bestimmung der plastischen Multiplikatoren wird zum iterativen Prozeß. Sind alle Fließkriterien im Inkrement aktiv, wird der Spannungszustand in die gemeinsame Schnittmenge

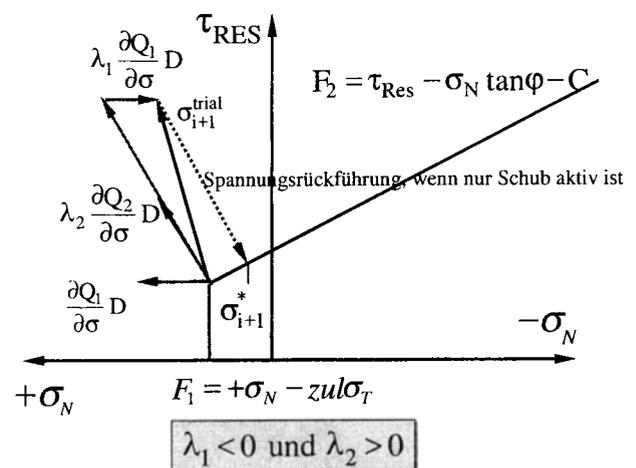


Abb. 3. Aktivität beider Fließbedingungen nicht möglich

Fig 3. Activities of both yield functions are not possible

geführt. Der plastische Dehnungsvektor setzt sich dann aus einer Kombination von  $j$ -Dehnungsvektoren mit  $j$ -Multiplikatoren zusammen.

Für eine konsistente und robuste numerische Verarbeitung in impliziten Berechnungsstrategien mit möglichst großen Dehnungsincrementen müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

- Konsistenzbedingungen aller aktiven Fließflächen sind erfüllt
- abhängige Ermittlung der plastischen Multiplikatoren
- Prüfen der Eindeutigkeit der Aktivitäten bei der Spannungsrückführung

In der Literatur können nur wenige mathematische Umsetzungen mit abhängigen plastischen Multiplikatoren gefunden werden. Simo [4] schlägt für den lokalen Iterationsprozeß einen Return Mapping Algorithmus mit abhängigen plastischen Multiplikatoren aus einem Gleichungssystem und für die globale Iteration eine Newton-Raphson-Iteration mit konsistenter elasto-plastischer Tangente vor. Alle in der ersten globalen Iteration vom Versuchsspannungszustand überschrittenen Fließbedingungen werden zu einem Set aktiver Fließbedingungen gezählt. Im Verlauf des lokalen Iterationsprozesses wird die Annahme der Aktivität von Fließbedingungen ständig überprüft. Wird ein plastischer Multiplikator im Lastinkrement negativ, war die Annahme falsch und muß korrigiert werden.

Bei der Herleitung der plastischen Multiplikatoren wird in den Konsistenzbedingungen von Spannungszuständen  $(\sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*)$  auf der Fließfläche ausgegangen. Dann gilt:

$$F(\sigma_{i+1}^{trial}) = \frac{\partial F}{\partial \sigma} D d\epsilon. \quad (3)$$

War der letzte zulässige Spannungszustand im elastischen Bereich, muß nur ein Teil des Spannungsincrementes umgelagert werden

$$F(\sigma_{i+1}^{trial}) \neq \frac{\partial F}{\partial \sigma} D d\epsilon. \quad (4)$$

Die Fließflächenüberschreitung  $F(\sigma_{i+1}^{trial})$  gibt dabei den Abstand zwischen Durchstoßpunkt und dem Versuchsspannungszustand an. In den Bestimmungsgleichungen der plastischen Multiplikatoren werden deshalb in der Folge die Fließflächen-überschreitungen aus Gl. (5) verwendet.

$$\lambda = \frac{F(\sigma_{n+1}^{trial})}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T D \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)}. \quad (5)$$

Anstelle von Gleichung (2) tritt dann die Beziehung

$$F_n = \sum_{j=1}^{\text{Set aktiver F}} F_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial \sigma}\right)^T D \lambda_j \left(\frac{\partial Q_j}{\partial \sigma}\right). \quad (6)$$

Bleiben die Gradienten der Fließfunktion bei der Rückführung konstant, können die konsistenten plastischen Multiplikatoren explizit ermittelt werden. Schon bei der Bearbeitung einzelner Fließbedingungen kommt es beim Wechsel der Hauptspannungsrichtungen des isotropen Mohr-Coulombschen Schubbruch-kriteriums oder bei einem Vorzeichenwechsel der resultierenden Schubspannung des anisotropen Schubbruchkriterium in den Trennflächen zu Änderungen der Gradienten. Sind mehrere Fließflächen aktiv, ändern sich zudem bei gleichzeitigem Bearbeiten isotroper und anisotroper Fließbedingungen die Hauptspannungs-richtungen und damit die Gradienten der isotropen Fließbedingungen. Aus diesen Gründen ist für das gewählte Materialmodell das Return Mapping Verfahren ein iterativer Vorgang.

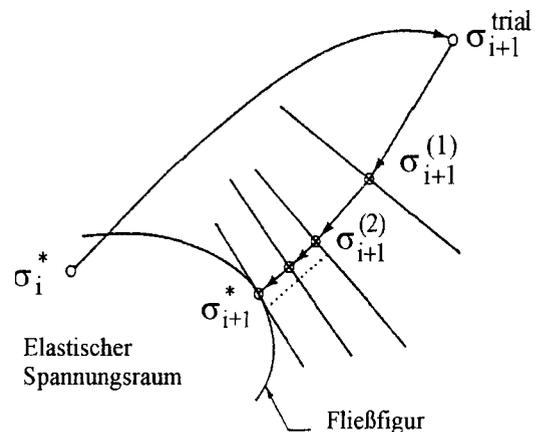


Abb. 4. Relaxation der elastischen Prädiktorspannung auf die Fließfläche mit dem Return-Mapping Verfahren

Fig 4. Return mapping method – stepwise correction of the predictor stress to the yield function

Das führt zu einer lokalen Iteration im Diskretisierungspunkt für das Auffinden des konsistenten Spannungszustandes. Bei der Umsetzung der von Simo [4] vorgeschlagenen Verarbeitung mehrflächiger Plastizität im multilaminaren Materialmodell traten bei der abhängigen Bestimmung der Multiplikatoren folgende Probleme auf:

➤ Das Gleichungssystem (6) hat keine Lösung, wenn keine Schnittmenge der untersuchten Fließbedingungen vorhanden ist. Die eindeutige Bestimmung der Aktivität durch Eliminierung von Fließkriterien ist dann nicht möglich.

➤ Im Laufe des lokalen Iterationsprozesses eines Lastinkrementes können Fließbedingungen aktiviert oder deaktiviert werden. Die Annahme der Aktivität über das gesamte Inkrement ist nicht gesichert.

Insgesamt ist festzustellen:

Wurde das Dehnungsinkrement zu groß, konnte die Aktivität der Fließbedingungen nicht mehr eindeutig bestimmt werden. Zur Ermittlung der Zulässigkeit des Dehnungsinkrementes zur eindeutigen Bestimmung der Aktivitäten wurde deshalb festgelegt:

Das Inkrement ist zulässig, wenn verglichen mit dem letzten Gleichgewichtszustand die Aktivitäten der Fließbedingungen sich nicht ändern oder wenn eine weitere Fließbedingung aktiv wird.

Dieses Kriterium sichert die eindeutige Bestimmung der Aktivitäten und das richtige Abschreiten des Spannungspfades auf der mehrflächigen Fließfigur. Restfestigkeiten werden nur mit gesicherten Aktivitätsannahmen in Gleichgewichtspunkten der Newton-Raphson-Iteration eingeführt. Ist das Dehnungsinkrement zur sicheren Bestimmung der Aktivitäten zu groß, muß entweder das Lastinkrement der Newton-Raphson-Iteration verkleinert (globale Inkrementierung) oder das Dehnungsinkrement im betreffenden Diskretisierungspunkt unterteilt werden (lokale Inkrementierung). Es sollte eine möglichst gute Kombination von globaler und lokaler Inkrementierung angestrebt werden. Für die Konvergenzbeschleunigung der Newton-Raphson-Iteration ist die Bestimmung der konsistenten elastoplastischen Tangente wichtig.

$$D_{EP} = D - D_{PL} \quad (7)$$

$D_{PL}$  ist hier die Änderung der elastischen Deformationsmatrix  $D$ .

In Kreuzungsbereichen mehrerer Fließbedingungen setzt sich die plastische Steifigkeitsmatrix  $D_{EP}$  aus Anteilen aller aktiver Fließkriterien zusammen. Da die Tangenten-änderung von Betrag und Richtung der plastischen Dehnungen und damit von den plastischen Multiplikatoren aller aktiven Fließkriterien  $j$  abhängt, wird eine Wichtung der Tangentenänderungen jeder aktiven Fließbedingung notwendig (8).

$$D_{PL} = \sum_{j=1,n} D_{PLj} \xi_j \quad \text{mit } \xi_j = \frac{\lambda_{j-\text{abhäng.}}(Gl.6)}{\lambda_{j-\text{unabhängig}}(Gl.5)} \quad (8)$$

Eingesetzt ergibt sich

$$D_{PL} = \sum_{j=1,n} D \left( \frac{\partial Q_j}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial F_j}{\partial \sigma} \right)^T D^T \frac{\lambda_{j-\text{abh.}}}{F_j} \quad (9)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Verwendung der elasto-plastischen Tangente keinen Einfluß auf das Ergebnis der Gleichgewichtsiteration hat, sondern nur für die Konvergenzgeschwindigkeit der Newton-Raphson-Iteration von Bedeutung ist.

Bei der Verwendung von nichtassoziierter Plastizität werden die elastoplastischen Deformationsmatrizen unsymmetrisch.

### 3. Erweiterungen

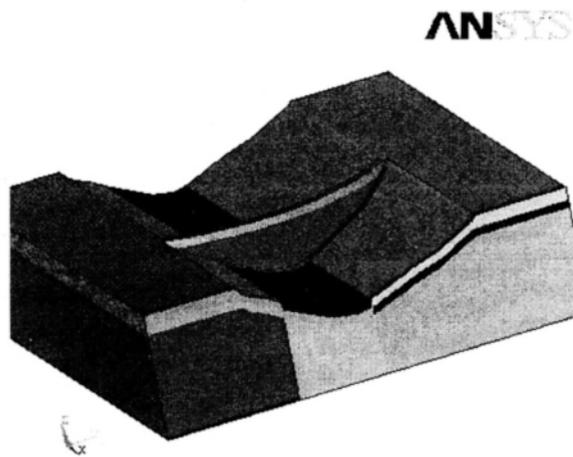
Alle bisher vorgestellten numerischen Algorithmen haben bis auf die Konvexität der mehrflächigen Fließfigur keinerlei Einschränkungen. Deshalb kann unter beliebiger Kombination weiterer Fließkriterien der Anwendungsbereich des Materialmodells erweitert werden. Zur Beschreibung von Beton wurde z.B. eine zusammengesetzte Fließfläche von DRUCKER-PRAGER implementiert:

$$\tau + \beta' \sigma_0 - H = 0. \quad (10)$$

Reibungsparameter  $\beta'$  und der Kohäsionswert  $H$  werden im Zug und Druckbereich jeweils durch drei einfach zu ermittelnde Festigkeitswerte bestimmt. Mit dieser Kombination von zwei Fließkegeln kann im Bereich geringen hydrostatischen Druckes eine gute Übereinstimmung mit Versuchswerten erreicht werden [2]. Die für Metalle verwendete von-Mises-Fließbedingung ergibt sich bei Gleichheit aller drei Festigkeitskenngrößen als Sonderfall. Wie das oben beschriebene Modell von Mohr/Coulomb kann auch das Drucker/Prager-Modell mit bis zu vier Trennflächenscharen kombiniert werden.

### 4. Anwendungsbeispiel

Das Multisurface-Plastizitätsmodell wurde in ein Finite-Elemente-Modell implementiert und zur nicht-linearen Berechnung einer Staumauer aus Natursteinmauerwerk auf geklüftetem Fels eingesetzt. Im Fels wurden vier verschiedene Trennflächenscharen mit



**Abb. 5.** Modell einer Staumauer im geklüfteten Fels  
**Fig 5.** Model of a dam on jointed rock mass

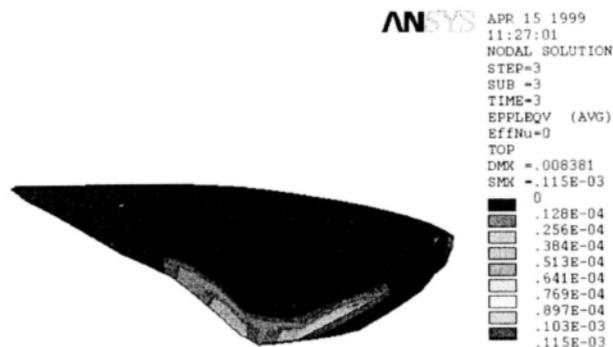
unterschiedlicher Raumlage und verschiedenen Festigkeitskennwerten berücksichtigt. Die Ergebnisse zeigen die Anwendbarkeit dieses Modells und neue Möglichkeiten bei der Berechnung anisotroper Materials.

### 5. Zusammenfassung

Bei der Verwendung von zusammengesetzten Fließbedingungen ist besonderes Augenmerk auf die Sicherung einer konsistenten und robusten numerischen Formulierung zu legen. Es konnte ein Integrationsalgorithmus zur eindeutigen Bestimmung der Aktivitäten von Fließbedingungen hergeleitet werden. Die Bestimmung der konsistenten elastoplastischen Tangente wurde auf Spannungszustände in Kreuzungsbereichen erweitert. Die Algorithmen wurden für die Berechnung von geklüfteten Gestein mit bis zu vier Trennflächenscharen entwickelt, getestet und an praktischen Problemstellungen verifiziert [5]. Der Anwendungsbereich läßt sich durch beliebige Kombinationen weiterer Fließkriterien leicht erweitern. Im multilaminaren Materialmodell kann das Materialverhalten von geklüfteten Fels, Beton sowie Mauerwerk mit oder ohne Anisotropieebenen numerisch robust und realitätsnah beschrieben werden.

### Literatur

1. W. Wittke. Felsmechanik – Grundlage des wirtschaftlichen Bauens im Fels. Berlin: Springer Verlag, 1984.
2. G. N. Pande, W. Xiong. An improved multi-laminate model of jointed rock masses; International Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Zürich, September, 1982, S. 218–225.



**Abb. 6.** Plastische Verformungen am Fuße der Mauer  
**Fig 6.** Yielding on the foot of the dam at the airside

3. E. M. Dawson. Micropolar Continuum Models for Jointed Rock. Thesis University of Minnesota, USA, 1995.
4. J. C. Simo, J. G. Kennedy, S. Govindjee. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity Loading // Unloading conditions and Numerical Algorithms; Int. J. Num. Meth. in Engineering, Vol 26, 1988, S. 2161–2185.
5. J. Will. Beitrag zur Standsicherheitsberechnung im geklüfteten Fels in der Kontinuums- und Diskontinuumsmechanik unter Verwendung impliziter und expliziter Berechnungsstrategien. Bauhaus-Universität Weimar, Dissertation, 1998.
6. D. Hintze. Zur Beschreibung des physikalisch nichtlinearen Betonverhaltens bei mehrachsigen Spannungszustand mit Hilfe differentieller Stoffgesetze unter Anwendung der Methode der finiten Elemente. HAB Weimar, Diss. 1986.

[teikta 1999 08 25

### DAUGIAPAVIRŠIAI PLASTIŠKUMO MODELIAI TAKUMO SĄLYGOMIS

D. Hintze, J. Will

S a n t r a u k a

Pateikiamas algoritmas pasirinktiems daugiapaviršiams plastiškumo modeliams. Visiško plastiškumo modelyje taikomi izotropinis ir anizotropinis Mohr-Coulomb kriterijai tempimo-ištiesintais ir asocijuoto arba neasocijuoto tekėjimo sąlygomis. Pagal tokį modelį gali būti aprašytos medžiagos, kurioms būdinga anizotropinė deformacija ir stiprumo pokyčiai, taip kaip ir nejudinta uoliena su jungčių tinklu. Taikant išplėstinį Drucker-Prager kriterijų izotropinės medžiagos matricai šis modelis taip pat gali būti taikomas ir kitoms medžiagoms modeliuoti, pvz., mūrui ar betonui. Aptariami uždaviniai gauti iš pasirinktų daugiapaviršių takumo kriterijų.

Daugiapaviršis plastiškumo modelis buvo įvestas į baigtinių elementų programą. Užtvankos iš uolienos su margais skaičiavimas iliustruoja tinkamumą ir naujas galimybes aprašyti anizotropines medžiagas.

## MULTISURFACE PLASTICITY MODELS UNDER YIELDING CONDITIONS

D. Hintze and J. Will

### S u m m a r y

An implicit integration algorithm for arbitrary multi-surface plasticity is presented. This perfectly-plastic model uses isotrop and anisotrop Mohr-Coulomb criteria with tension-cut-off and associated or non-associated flow rules. So materials with anisotropic deformation and strength behaviour like intact rock with sets of joints can be described. With an extended Drucker-Prager-criterion for the isotrop material matrix this model can be used as well for modelling other materials such as masonry or concrete. Problems resulting from arbitrary multisurface yield criteria are discussed. Consistent numerical algorithms for robust numerical solutions are presented.

The Multisurface plasticity model was implemented in a finite-element-program. The example of calculation of a dam on

jointed rock mass shows the applicability and new possibilities for the description of anisotropic materials.

---

**Dagmar HINTZE.** Doctor, scientific researcher. Institute of Structural Mechanics. Bauhaus-University Weimar, Marienstraße 15, D-99421 Weimar, Germany.

From 1976 at HAB Weimar, Dept of Building Mechanics. Doctor (1987). From 1995 at Institute of Structural Mechanics. Research interests: physical non-linear behaviour of materials (concrete, masonry, soils, rock), plasticity theory, damage (fracturing) theory, cracks (smeared, discrete), non-linear computational mechanics.

---

**Johannes WILL.** Doctor. Department manager at CAD-FEM GmbH, Marktplatz 2, D-85567 Grafing, Germany.

1994–98 scientific researcher at Institute of Structural Mechanics. Doctor (1999). From 1998 development engineer. Research interests: linear and non-linear computational mechanics, design, coding, documentation and testing.