Statyba

ISSN: 1392-1525 (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/tcem19

# LOAD OPTIMIZATION OF ELASTIC-PLASTIC FRAMES AT SHAKEDOWN

V. Skaržauskas , D. Merkevičiūtė & J. Atkočiūnas

ISSN 1392-1525. STATYBA – CIVIL ENGINEERING – 2001, VII tomas, Nr. 6



# PRISITAIKANČIŲ TAMPRIAI PLASTIŠKŲ RĖMŲ APKROVOS OPTIMIZACIJA

**V. Skaržauskas, D. Merkevičiūtė, J. Atkočiūnas**
*Vilniaus Gedimino technikos universitetas*

## 1. Įvadas

Disipacinėse sistemose (tokia yra konstrukcija, patirianti plastinį deformavimą) įrąžos ir poslinkiai priklauso nuo apkrovimo istorijos [1]. Ypač sudėtingas prisitaikiusių prie kintamos-kartotinės apkrovos tampriųjų plastinių konstrukcijų determinuotas skaičiavimas, kai apkrova apibrėžiama tik jos kitimo ribomis. Naujausios mokslinės literatūros apie prisitaikiusių konstrukcijų optimizacijos uždavinius gausa patvirtina tyrimų šioje srityje aktualumą, kita vertus – dar nepakankamą problemos išsprendimą praktiniu lygiu [2].

Matematika ir mechanika visada turėjo įtakos viena kitos raidai, keliant mokslines idėjas bei ieškant bendrų jų įgyvendinimo būdų ir metodų. Siekiant konstrukcijų mechanikoje efektyviai taikyti kompiuterines technologijas, svarbu remtis ir matematinio programavimo teorija, taikyti jos metodus sudėtingų sistemų optimaliems sprendiniams rasti, ypač pasinaudoti mechanine šių metodų interpretacija. Ekstreminių energinių mechanikos principų, matematinio programavimo teorijos taikymas formuluojant ir sprendžiant tampriųjų plastiškų konstrukcijų, taip pat ir rėmų, prisitaikomumo uždavinius tampa logiškas, žvelgiant iš abiejų – mechanikos ir matematikos – pozicijų [3, 4].

Straipsnyje matematinio programavimo teorija taikoma, sudarant patobulintus prisitaikiusio rėmo apkrovos optimizacijos netiesinių uždavinių matematinius modelius ir atliekant skaitinį jų eksperimentą. Pasiūlytas naujas optimizacijos uždavinio sprendimo algoritmas, sudarytas remiantis Rozeno optimalumo kriterijaus mechaninės prasmės interpretacija [5–7], kuris iš esmės skiriasi nuo šio straipsnio autorių ir kitų tyrėjų siūlytų algoritmų. Taip gaunamas uždavinio matematinės formuluotės ir skaitinio sprendimo metodo loginis ryšys.

## 2. Apkrovos optimizacijos uždavinio formuluotė

Nagrinėjamas prisitaikiusio tampriai plastiško rėmo būvis. Lenkiamo rėmo geometrija, idealios skerspjūvio formos matmenys ir medžiaga, t. y. ribinių įrąžų vektorius $\mathbf{M}_0$ žinomi. Kvazistatinė apkrova $\mathbf{F}(t)$ charakterizuojama nepriklausančiomis nuo laiko $t$ viršutinėmis ir apatinėmis kitimo ribomis $\mathbf{F}_{sup}$, $\mathbf{F}_{inf}$ (jėgų pridėjimo vieta žinoma). Konkreti apkrovimo istorija nežinoma, jos ribos $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$. Tuomet apkrovos optimizacijos uždavinys formuluojamas taip: *ieškomos rėmo prisitaikomumo būvio apkrovos kitimo ribos* $\mathbf{F}_{sup}$, $\mathbf{F}_{inf}$, *tenkinančios pasirinktą optimalumo kriterijų* $max\ \{\mathbf{T}_{sup}^T\,\mathbf{F}_{sup} + \mathbf{T}_{inf}^T\,\mathbf{F}_{inf}\}$ *bei konstrukcijos stiprumo ir standumo sąlygas*. Čia $\mathbf{T}_{sup}$, $\mathbf{T}_{inf}$ yra optimalumo kriterijaus svorio koeficientų vektoriai. Prisitaikęs rėmas yra saugus plastinio suirimo atžvilgiu, tačiau jis gali neatitikti eksploatacinių (pavyzdžiui, standumo) reikalavimų. Štai kodėl apkrovos kitimo ribų optimizacijos uždavinio matematiniame modelyje turi būti ne tik stiprumo, bet ir standumo sąlygos – apribojimai. Standumo apribojimai yra susiję su liekamųjų deformacijų $\Theta_r(t)$ ir poslinkių $\mathbf{u}_r(t)$, priklausančių nuo konkrečios apkrovimo istorijos, skaičiavimu. Jei konkreti apkrovimo istorija nenagrinėjama, galima apskaičiuoti tik prisitaikymo būvio liekamųjų poslinkių kitimo ribas $\mathbf{u}_{r,inf} \leq \mathbf{u}_r(t) \leq \mathbf{u}_{r,sup}$. Taigi prisitaikiusio rėmo apkrovos optimizacija jungia du uždavinius. Pirmasis uždavinys nagrinėja prisitaikymo būvio statiškai leistiną momentų pasiskirstymą (tai – liekamųjų momentų $\mathbf{M}_r$ analizės uždavinys). Sprendžiant antrąjį uždavinį tikrinama, ar nepažeisti rėmo standumo apribojimai (iš esmės tai liekamųjų poslinkių kitimo ribų $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ tikrinamasis uždavinys). Padėtį sunkina tai, kad abiejų minėtų uždavinių sprendimas konstrukcijų prisitaikomumo analizėje susipynęs, t. y. turi būti atliekamas toje pačioje apkrovos optimizacijos uždavinio sprendimo iteracijoje. Visa tai turi būti tinkamai įvertinta, sudarant apkrovos optimizacijos uždavinių matematinius modelius.

### 3. Optimizacijos uždavinių matematiniai modeliai

Rėmo apkrovos optimizacijos uždavinio matematinio modelio formuluotę lemia liekamųjų momentų $\mathbf{M}_r$ analizės uždavinio pateikimo forma. Pirmojoje formuluotėje momentų analizės uždavinys pateikiamas kaip kvadratinio programavimo problema. Apkrovos optimizacijos uždavinio tikslo funkcija tuomet yra tiesinė. Antrojoje formuluotėje analizės uždavinio lygtys ir priklausomybės užrašomos pagal pilnutinę plastiškumo teorijos lygčių sistemą. Šiam atvejui optimizacijos uždavinio tikslo funkcija tampa netiesine.

*Pirmoji matematinio modelio formuluotė.* Analizės uždavinys užrašomas, naudojant kvadratinį programavimą. Reikia rasti

$$max\ \left\{\mathbf{T}_{sup}^T\,\mathbf{F}_{sup}+\mathbf{T}_{inf}^T\,\mathbf{F}_{inf}\right\}=W, \tag{1}$$

esant sąlygoms

$$min\ \ 0{,}5\mathbf{M}_r^T[D]\mathbf{M}_r \tag{2}$$

$$[A]\,\mathbf{M}_r=\mathbf{0}, \tag{3}$$

$$\varphi_{max}=\mathbf{M}_0-\mathbf{M}_r-\mathbf{M}_{e,max}-\mathbf{M}_q\ \geq\mathbf{0},$$

$$\varphi_{min}=\mathbf{M}_0+\mathbf{M}_r+\mathbf{M}_{e,min}+\mathbf{M}_q\ \geq\mathbf{0}, \tag{4}$$

$$\mathbf{M}_{e,max}=\left[\alpha_{sup}\right]\mathbf{F}_{sup}-\left[\alpha_{inf}\right]\mathbf{F}_{inf},$$

$$\mathbf{M}_{e,min}=-\left[\alpha_{sup}\right]\mathbf{F}_{inf}+\left[\alpha_{inf}\right]\mathbf{F}_{sup}, \tag{5}$$

$$\mathbf{F}_{inf}\geq\mathbf{0},\quad \mathbf{F}_{sup}\geq\mathbf{0}; \tag{6}$$

$$\lambda\geq\mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\mathbf{u}_{r,min}\leq[H]\lambda\leq\mathbf{u}_{r,max}. \tag{8}$$

Analizės uždavinys (2)–(5) sudarytas pagal papildomos deformavimo energijos minimumo principą ($[D]$ – pasiduodamumo matrica). Matematinio modelio (1)–(8) analizės uždavinyje (2)–(5) tiesinės takumo sąlygos (4) $[\Phi]\,\mathbf{M}\leq\mathbf{M}_0$ užrašomos, naudojant vienetinę matricą $[I]$ ir įgauna pavidalą $[I]\,\mathbf{M}\leq\mathbf{M}_0$, $-[I]\,\mathbf{M}\leq\mathbf{M}_0$. Prisitaikymo būvio plastinės deformacijos skaičiuojamos pagal formulę: $\Theta_p=[\Phi]^T\lambda$, čia $\lambda=(\lambda_{\max},\lambda_{\min})^T$ – plastinių daugiklių vektorius. Uždavinyje (1)–(8) rėmo elementų ribinių momentų $\mathbf{M}_0$ ir tamprių ekstreminių momentų $\mathbf{M}_{e,max}$, $\mathbf{M}_{e,min}$ vektoriai žinomi. Momentų $\mathbf{M}_{e,max}$, $\mathbf{M}_{e,min}$ reikšmės apskaičiuotos, esant žinomai apkrovai (apkrovos kitimo ribų reikšmėms). $\mathbf{M}_q$ – momentai nuo pastovios apkrovos ar distorsijos [8]. Analizės uždavinio nežinomieji yra statiškai leistini (atitinkantys pusiausvyros lygtis $[A]\,\mathbf{M}_r=\mathbf{0}$ ir takumo sąlygas $\mathbf{M}\leq\mathbf{M}_0$, $-\mathbf{M}\leq\mathbf{M}_0$) liekamieji momentai $\mathbf{M}_r$ (optimalus uždavinio sprendinys žymimas $\mathbf{M}_r^*$).

Nelygybės (8) $\mathbf{u}_{r,min}\leq\mathbf{u}_r=[H]\,\lambda\leq\mathbf{u}_{r,max}$ yra prisitaikiusio rėmo standumo sąlygos; čia liekamųjų poslinkių influentinė matrica

$$[\overline{H}]=\left([A][D]^{-1}[A]^T\right)^{-1}[A][D]^{-1}\ \text{ leidžia užrašyti:}$$

$$\mathbf{u}_r=[\overline{H}]\,\Theta_p\ \text{ ir }\ \mathbf{u}_r=[\overline{H}]\,[\Phi]^T\lambda=[H]\lambda.$$

Tikrinant standumo sąlygas (8), naudojamas nežinomas plastinių daugiklių vektorius $\lambda$. Jis gaunamas kaip analizės uždavinio (2)–(5) sprendimo Rozeno projektuojamųjų gradientų metodu rezultatas [5]:

$$\lambda=\left(\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{M}^*\right)\right]\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{M}^*\right)\right]^T\right)^{-1}\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{M}^*\right)\right]\mathbf{T}. \tag{9}$$

Čia $\nabla\varphi$, $\mathbf{T}$ – takumo sąlygų (4) $\varphi=(\varphi_{max},\varphi_{min})^T$ ir tikslo funkcijos (1) $max\ \left\{\mathbf{T}_{sup}^T\,\mathbf{F}_{sup}+\mathbf{T}_{inf}^T\,\mathbf{F}_{inf}\right\}$ = $max\ \mathbf{T}^T\mathbf{F}$ gradientai. Vektorius $\lambda$ matematiniame modelyje (1)–(8) užrašytas (7) pozicijoje kaip ir analizės uždavinio (2)–(6) sprendimo rezultatas.

Apkrovimo proceso metu gali įvykti pjūvių „nusikrovimas", t. y. $j$-ojo pjūvio takumo sąlyga – lygybė vėliau tampa nelygybe. Kitaip tariant, $\lambda_j>0$ turėtų išlikti iki plastinio deformavimo proceso pabaigos (tik tam tikrais plastinio deformavimo atvejais $\lambda_j=0$). Tampa akivaizdu, kad matematinio programavimo griežtumo sąlyga $\varphi^T\lambda=0$ neleidžia įvertinti „nusikrovimo". Atsižvelgiant į galimą „nusikrovimą", nelygybė (8) turi būti pertvarkyta:

$$\left.\begin{aligned} &u_{ri,min}\leq min[H_i]\,\tilde{\lambda},\\ &max\,[H_i]\,\tilde{\lambda}\leq u_{ri,max},\quad i=1,2,\ldots,m.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Liekamųjų poslinkių kitimo ribų vektoriai $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ gaunami kiekvienam poslinkio komponentui $u_i$, $i=1,2,...,m$ sprendžiant tokį tiesinio programavimo uždavinį, kai reikia rasti

$$\begin{matrix} max \\ min \end{matrix} [H_i]\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} u_{ri,sup} \\ u_{ri,inf} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,...,m, \qquad (11)$$

esant sąlygoms

$$[B_\lambda]\tilde{\lambda} = [B_r]\mathbf{M}_r^*, \quad \tilde{\lambda} \geq \mathbf{0},$$

$$\tilde{\lambda}^T \tilde{\mathbf{M}}_0 \leq \tilde{D}_{max}, \qquad (12)$$

čia $\tilde{\mathbf{M}}_0$ – fiktyvios konstrukcijos (rėmo) ribinių momentų vektorius [4]. $\tilde{\mathbf{M}}_0$ yra toks, kad visuose rėmo pjūviuose takumo sąlygos formaliai atitiktų lygybes. Taigi vektoriaus $\tilde{\lambda} \geq \mathbf{0}$ komponentai nesiejami su matematinio programavimo griežtumo sąlygų tenkinimu ir fizinės plastinių daugiklių prasmės gali neturėti. Rėmo prisitaikymo metu disipuojama energija $D$. Fiktyvaus rėmo analizės uždavinio sprendimu gaunama viršutinė energijos disipacijos riba $\tilde{D}_{max}$. Uždavinyje (11)–(12) esantis $\tilde{D}_{max}$ yra žinomas dydis. Į uždavinio (11)–(12) sąlygas įeinančios lygtys $[B_\lambda]\tilde{\lambda} = [B_r]\mathbf{M}_r^*$ yra rėmo liekamųjų deformacijų darnos lygtys. Jei takumo sąlygos yra tiesinės, tai matrica $[B_\lambda] = [B][\Phi]^T$ nustatoma naudojant matricą $[B] = \left[ [A'']^T \left([A']^T\right)^{-1}, \ -[I] \right]$. Čia matricos $[A']$ ir $[A'']$ yra gautos išskaidžius matricą $[A]$ į kvadratinę ir stačiakampę matricas. Kita į deformacijų darnos lygtis įeinanti matrica yra tokia: $[B_r] = -[A'']^T \left([A']^T\right)^{-1} [D'] + [D'']$. Liekamųjų momentų vektorius $\mathbf{M}_r^*$ yra optimalus analizės uždavinio (2)–(5) sprendinys. Jis yra vienintelis bet kuriai programai $\mathbf{F}(t)$, vykstančiai, kai apkrovimo ribos $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$. Jeigu sąlygoje (12) naudojamas pradinis liekamųjų momentų vektorius $\mathbf{M}_0$, ribos $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ gaunamos kiek sumažintos.

Išsprendus apkrovos optimizacijos uždavinį (1)–(8) gaunamos optimalios jėgų kitimo ribos $\mathbf{F}_{sup}^*$, $\mathbf{F}_{inf}^*$, momentai $\mathbf{M}_r^*$, plastiniai daugikliai $\lambda^*$ ir poslinkiai $\mathbf{u}_r^*$.

*Antroji matematinio modelio formuluotė.* Apkrovos optimizacijos uždavinio matematinis modelis sudaromas pagal pilnutinę plastiškumo teorijos lygčių sistemą:

$$-[A]\mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad [A]^T \mathbf{u}_r = [D]\mathbf{M}_r + [\Phi]\lambda,$$

$$\varphi_{max} = \mathbf{M}_0 - [G]\lambda - \mathbf{M}_{e,max} - \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0},$$

$$\varphi_{min} = \mathbf{M}_0 + [G]\lambda + \mathbf{M}_{e,min} + \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_{e,max} = [\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{sup} - [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{inf},$$

$$\mathbf{M}_{e,min} = -[\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{\inf} + [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{\sup},$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}, \quad \lambda^T \varphi = 0,$$

$$\mathbf{F}_{inf} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{sup} \geq \mathbf{0};$$

$$\mathbf{u}_{r,min} \leq [H]\lambda \leq \mathbf{u}_{r,max}.$$

Tuomet rėmo apkrovos optimizacijos uždavinio matematinis modelis, kai reikia rasti

$$max \left\{ \mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup} + \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf} \right\}, \qquad (13)$$

esant sąlygoms

$$\varphi_{max} = \mathbf{M}_0 - [G]\lambda - \mathbf{M}_{e,max} - \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0},$$

$$\varphi_{min} = \mathbf{M}_0 + [G]\lambda + \mathbf{M}_{e,min} + \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{M}_{e,max} = [\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{sup} - [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{inf},$$

$$\mathbf{M}_{e,min} = -[\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{\inf} + [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{\sup},$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}, \quad \lambda^T \varphi = 0, \qquad (15)$$

$$\mathbf{F}_{inf} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{sup} \geq \mathbf{0}; \qquad (16)$$

$$\mathbf{u}_{r,min} \leq [H]\lambda \leq \mathbf{u}_{r,max}. \qquad (17)$$

Uždavinyje (13)–(17) žinomi ribinių momentų $\mathbf{M}_0$ ir momentų $\mathbf{M}_q$ vektoriai. Ekstreminiai momentai $\mathbf{M}_{e,max}$, $\mathbf{M}_{e,min}$ yra ribų $\boldsymbol{F}_{sup}$, $\boldsymbol{F}_{inf}$ funkcijos. Liekamieji momentai $\mathbf{M}_r$ skaičiuojami naudojant liekamųjų momentų influentinę matricą $[G^*]$:

$$[G^*] = [D]^{-1}[A]^T \left([A][D]^{-1}[A]^T\right)^{-1}[A][D]^{-1} - [D]^{-1},$$

$$\mathbf{M}_r = [G^*]\Theta_p = [G]\lambda. \qquad (18)$$

Uždavinio (13)–(17) ieškomieji dydžiai yra optimalios ribos $\mathbf{F}_{sup}^*$, $\mathbf{F}_{inf}^*$ ir vektorius $\lambda^*$. Sąlyga (17) leidžia gauti optimalias ribas $\mathbf{F}_{sup}^*$, $\mathbf{F}_{inf}^*$, esant ne tokiems griežtiems standumo apribojimams. Bendruoju atveju į apribojimus (17) turi įeiti uždavinio (11)–(12) sprendimo rezultatai:

$$u_{ri,min} \leq min[H_i]\tilde{\lambda}, \quad max[H_i]\tilde{\lambda} \leq u_{ri,max}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

## 4. Apie uždavinių sprendimo algoritmus

Pradžioje apie naująjį uždavinio (1)–(8) sprendimo algoritmą. Uždavinys (1)–(8) nėra klasikinis matematinio programavimo uždavinys, kadangi jo sąlygose-apribojimuose savo ruožtu figūruoja atskiras kvadratinio programavimo (liekamųjų momentų $\mathbf{M}_r$ analizės) uždavinys (2)–(5). Siūlomas apkrovos optimizacijos uždavinio (1)–(8) etapinio sprendimo algoritmas. Etapą $\nu$, kurio metu atliekama keletas Rozeno algoritmo [5] iteracijų, lemia tikslo funkcijos (1) galimų skaitinių reikšmių suskirstymas į dėmenis $\Delta W^{\nu}$. Tai aptariama detaliau. Pirmojo etapo $\nu = 1$ vykdymo pradžioje sprendžiamas toks uždavinys, kai reikia rasti

$$max \left\{\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup}^{\nu} + \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf}^{\nu}\right\}, \tag{19}$$

esant sąlygoms

$$[A]\mathbf{M}_r^{\nu} = \mathbf{0}, \tag{20}$$

$$\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_r^{\nu} - \mathbf{M}_{e,max}^{\nu} - \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_r^{\nu} + \mathbf{M}_{e,min}^{\nu} + \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0}, \tag{21}$$

$$\mathbf{M}_{e,max}^{\nu} = [\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{sup}^{\nu} + [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{inf}^{\nu},$$

$$\mathbf{M}_{e,min}^{\nu} = -[\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{inf}^{\nu} - [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{sup}^{\nu}, \tag{22}$$

$$\mathbf{F}_{inf}^{\nu} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{sup}^{\nu} \geq \mathbf{0}, \tag{23}$$

$$\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup}^{\nu} + \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf}^{\nu} \leq \sum_{\nu} \Delta W^{\nu}. \tag{24}$$

Uždavinio (19)–(23) vienkartiniu sprendimu būtų randamos optimalios jėgų kitimo ribos $\mathbf{F}_{sup}^*$, $\mathbf{F}_{inf}^*$, esant cikliniam-plastiniam rėmo suirimui [9]. Nelygybė (24) verčia uždavinį (19)–(24) spręsti etapais, čia $\Delta W^{\nu}$ – iš anksto pasirinktas tikslo funkcijos prieaugis. Išsprendus uždavinį (19)–(24), randamos $\nu$-ajam etapui optimalios jėgų kitimo ribos $\mathbf{F}_{sup}^{\nu*}$, $\mathbf{F}_{inf}^{\nu*}$ bei liekamųjų momentų vektorius $\mathbf{M}_r^{\nu}$. Vektoriaus $\mathbf{M}_r^{\nu}$ komponentai vienareikšmiškai nustatyti pjūviams, kuriuose takumo sąlygos (21) atitinka lygybes. Kitaip tariant, gali egzistuoti kitas liekamųjų momentų vektorius $\mathbf{M}_r^{\nu*}$, kuriam papildomos energijos reikšmė (2) yra mažesnė.

Tikrajam $\nu$-ojo etapo momentų vektoriui $\mathbf{M}_r^{\nu*}$ rasti ir sprendžiamas analizės uždavinys (2)–(5), esant žinomai apkrovai $\mathbf{F}_{sup}^{\nu*}$, $\mathbf{F}_{inf}^{\nu*}$. Reikia rasti

$$min \ \frac{1}{2}\mathbf{M}_r^{\nu T}[D]\mathbf{M}_r^{\nu}, \tag{25}$$

esant sąlygoms

$$[A]\mathbf{M}_r^{\nu} = \mathbf{0}, \tag{26}$$

$$\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_r^{\nu} - \mathbf{M}_{e,max}^{\nu*} - \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_r^{\nu} + \mathbf{M}_{e,min}^{\nu*} + \mathbf{M}_q \geq \mathbf{0}, \tag{27}$$

$$\mathbf{M}_{e,max}^{\nu*} = [\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{sup}^{\nu*} - [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{inf}^{\nu*},$$

$$\mathbf{M}_{e,min}^{\nu*} = -[\alpha_{sup}]\mathbf{F}_{inf}^{\nu*} + [\alpha_{inf}]\mathbf{F}_{sup}^{\nu*}. \tag{28}$$

Išsprendus analizės uždavinį (25)–(28), gaunamas tikrasis vektorius $\mathbf{M}_r^{\nu*}$. Pasinaudojus Rozeno algoritmo optimalumo kriterijaus matematine-mechanine interpretacija [6], gaunamas plastinių daugiklių vektorius $\lambda^{\nu*}$. Toliau tikrinama, ar $\nu$-ajame etape nėra pažeistos rėmo standumo sąlygos:

$$\mathbf{u}_{r,min} \leq [H]\lambda^{\nu*} \leq \mathbf{u}_{r,max}. \tag{29}$$

Net ir jų nepažeidus, prisitaikiusiam rėmui būtina patikrinti nelygybes (10):

$$u_{ri,min} \leq u_{ri,inf}^{\nu} = min[H_i]\tilde{\lambda}^{\nu*},$$

$$u_{ri,sup}^{\nu} = max[H_i]\tilde{\lambda}^{\nu*} \leq u_{ri,max}, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{30}$$

Liekamųjų poslinkių kitimo ribų vektoriai $\mathbf{u}_{r,inf}^{\nu}$, $\mathbf{u}_{r,sup}^{\nu}$ gaunami sprendžiant uždavinį (11)–(12). Jeigu sąlygos (30) pažeistos, grįžtama į $\nu$-ojo etapo pradžią, prieš tai sumažinus $\Delta W^{\nu}$. Mažinimo procedūra kartojama tol, kol bus įvykdytos sąlygos (30).

Apie apkrovos optimizacijos uždavinio pagal matematinio modelio antrąją formuluotę (13)–(17) sprendimą. Tai iškilojo matematinio programavimo uždavinys, kurio skaitinę realizaciją apsunkina griežtumo sąlyga $\lambda^T\varphi = 0$. Uždavinio sprendimui Rozeno projektuojamųjų gradientų metodu atliekamas matematinio modelio (13)–(17) algoritminis pertvarkymas, kai reikia rasti

$$max\ \left\{\mathbf{T}_{sup}^{T}\,\mathbf{F}_{sup}+\mathbf{T}_{inf}^{T}\,\mathbf{F}_{inf}\right.$$

$$-\ \lambda_{max}^{T}\left[\mathbf{M}_0-\left([G]\,\lambda+\mathbf{M}_{e,max}+\mathbf{M}_q\right)\right]$$

$$\left.-\lambda_{min}^{T}\left[\mathbf{M}_0+\left([G]\,\lambda+\mathbf{M}_{e,min}+\mathbf{M}_q\right)\right]\right\}, \quad (31)$$

esant sąlygoms

$$\varphi_{max}=\mathbf{M}_0-[G]\,\lambda-\mathbf{M}_{e,max}-\mathbf{M}_q\ \geq \mathbf{0},$$

$$\varphi_{min}=\mathbf{M}_0+[G]\,\lambda+\mathbf{M}_{e,min}+\mathbf{M}_q\ \geq \mathbf{0}, \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{e,max}=\left[\alpha_{sup}\right]\mathbf{F}_{sup}-\left[\alpha_{inf}\right]\mathbf{F}_{inf},$$

$$\mathbf{M}_{e,min}=-\left[\alpha_{sup}\right]\mathbf{F}_{\mathrm{inf}}+\left[\alpha_{inf}\right]\mathbf{F}_{\mathrm{sup}},$$

$$\lambda\geq \mathbf{0},\quad \lambda^{T}\varphi=0, \quad (33)$$

$$\mathbf{F}_{inf}\geq \mathbf{0},\quad \mathbf{F}_{sup}\geq \mathbf{0}; \quad (34)$$

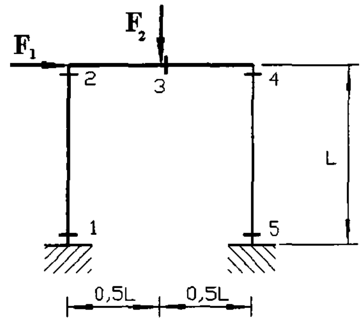
$$\mathbf{u}_{r,min}\leq [H]\lambda\leq \mathbf{u}_{r,max}. \quad (35)$$

Matematinio programavimo griežtumo sąlyga $\lambda^{T}\varphi=0$ čia įeina ir į tikslo funkciją (31) pagal darbą [10]. Tačiau, skirtingai nuo darbo [10], matematinio programavimo griežtumo sąlyga (33) $\lambda^{T}\varphi=0$ uždavinio (31)–(35) sąlygose-apribojimuose išlieka. Taigi skaitinėmis reikšmėmis tikslo funkcijos (13) ir (31) išlieka „lygios“ visame Rozeno algoritmo vykdymo procese, nes $\lambda^{T}\varphi=0$. Šiuo atveju Rozeno algoritmas ir tiesinių takumo sąlygų atveju dirba stabiliai.

Uždavinys (31)–(35) sprendžiamas vienu etapu. Toliau tikrinamos griežtesnės standumo sąlygos (10), naudojant uždavinio (11)–(12) sprendinius. Taigi ir uždavinys (31)–35) sprendžiamas etapais, dirbtinai siaurinant liekamųjų poslinkių kitimo sritį $\mathbf{u}_{r,min}\leq [H]\lambda\leq \mathbf{u}_{r,max}$.

## 5. Skaitiniai pavyzdžiai

**Pavyzdys 1.** Nagrinėjamas portalinis rėmas (žr. paveikslą), kurio lenkiamųjų elementų skerspjūvio forma ideali (artima dvitėjui). Ribiniai lenkimo momentai $M_0$ ir standumai lenkimui $EI$ yra pastovūs. Nagrinėjamas atvejis, kai apkrovos $F_{1,inf}\leq F_1\leq F_{1,sup}$, $F_{2,inf}\leq F_2\leq F_{2,sup}$ ribos $F_{1,inf}=F_{2,inf}=0$ ir galutinai apkrovos vektorius $\mathbf{F}=\left(F_{1,sup},F_{2,sup}\right)^{T}$.




Sprendžiamas apkrovos maksimalaus kitimo intervalo, esant cikliniam-plastiniam suirimui, radimo uždavinys. Reikia rasti

$$\left.\begin{array}{l} max\,\mathbf{T}^{T}\mathbf{F}=max(\mathrm{F}_{1,sup}+\mathrm{F}_{2,sup}),\\ \text{esant salygoms}\\ \quad [A]\,\mathbf{M}_r=\mathbf{0},\\ \quad \mathbf{M}_r+\mathbf{M}_{e,max}\leq \mathbf{M}_{0},\\ \quad -\mathbf{M}_r-\mathbf{M}_{e,min}\leq \mathbf{M}_0,\\ \quad \mathrm{F}_{1,sup}\geq 0,\quad \mathrm{F}_{2,sup}\geq 0.\end{array}\right\} \quad (36)$$

Pseudotamprūs lenkimo momentai $\mathbf{M}_{e,max}$, $\mathbf{M}_{e,min}$ skaičiuojami, naudojant tampraus skaičiavimo momentų infliuentinę matricą $[\alpha]$:

$[\alpha]=L$

| $\overline{F}_1=1$ | $\overline{F}_2=1$ |
|---|---|
| $-0{,}2857$ | $0{,}0417$ |
| $-0{,}2143$ | $0{,}0833$ |
| $0$ | $0{,}1667$ |
| $-0{,}2143$ | $-0{,}0833$ |
| $-0{,}2857$ | $-0{,}0417$ |

Tuomet $\mathbf{M}_{e,max}=\left[\alpha_{sup}\right]\mathbf{F}$, $\mathbf{M}_{e,max}=\left[\alpha_{\mathrm{sup}}\right]\mathbf{F}$, $[\alpha]=\left[\alpha_{sup}\right]+\left[\alpha_{inf}\right]$. Uždavinio (36) sąlygos, tikslo funkcija ir skaičiavimo rezultatai pateikti tradicine *simplex* metodui forma (1 lentelė). Pirmosios dvi lentelės eilutės skirtos pusiausvyros lygtims $[A]\,\mathbf{M}_r=\mathbf{0}$, kitos dešimt eilučių – takumo sąlygoms $\mathbf{M}_r+\mathbf{M}_e\leq \mathbf{M}_0$, $-\mathbf{M}_r-\mathbf{M}_e\leq \mathbf{M}_0$. Tikslo funkcija užrašyta priešpaskutinėje eilutėje, optimalus uždavinio (36) sprendinys – paskutinėje eilutėje, taigi liekamųjų momentų vektorius yra $\mathbf{M}_r=(-0{,}3798\ \ 0{,}4109\ \ -0{,}1783\ \ 0{,}0543\ \ -0{,}0853)^{T}$. Į tikslo funkciją $max\left(F_{1,sup}^{*}+F_{2,sup}^{*}\right)$ įeinančių jėgų suma yra $9{,}2403M_0L^{-1}$.

**1 lentelė.** Uždavinio (36) sąlygos ir sprendimo rezultatai

**Table 1.** Conditions and calculation results of the problem (36)

| $M_{r1}$ | $M_{r2}$ | $M_{r3}$ | $M_{r4}$ | $M_{r5}$ | $F_{1,sup}$ | $F_{2,sup}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 1 | | | $=0$ |
| | − 2 | − 4 | 2 | | | | $=0$ |
| 1 | | | | | | 0,0417 | $\le 0$ |
| | 1 | | | | | 0,0833 | $\le 0$ |
| | | 1 | | | | 0,1667 | $\le 0$ |
| | | | 1 | | | | $\le 0$ |
| | | | | 1 | | | $\le 0$ |
| − 1 | | | | | 0,2857 | | $\le 0$ |
| | − 1 | | | | 0,2143 | | $\le 0$ |
| | | − 1 | | | | | $\le 0$ |
| | | | − 1 | | 0,2143 | 0,0833 | $\le 0$ |
| | | | | − 1 | 0,2857 | 0,0417 | $\le 0$ |
| | | | | | 1 | 1 | |
| -0,3798 | 0,4109 | -0,1783 | 0,0543 | -0,0853 | 2,1706 | 7,0697 | |

Uždaviniui (36) dualaus uždavinio sprendinys rodo, kad vienpusiai plastiniai šarnyrai atsivėrė visuose penkiuose paveiksle pažymėtuose pjūviuose. Tai progresyvinis tampraus plastinio rėmo suirimas. Šiek tiek sumažinus jėgų kitimo ribas iki $F_{1,sup} = 2{,}1700 M_0 L^{-1}$, $F_{2,sup} = 7{,}0688 M_0 L^{-1}$ (siekiant gauti liekamųjų momentų būvį prieš pat ciklinį plastinį suirimą), sprendžiamas rėmo analizės uždavinys, kai reikia rasti

$$\left.\begin{array}{l} \min \frac{1}{2}\mathbf{M}_r^T[D]\mathbf{M}_r, \\ \text{esant sąlygoms} \\ [A]\mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_r \le \mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_{e,max}, \\ \mathbf{M}_r \le \mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_{e,min}. \end{array}\right\} \qquad (37)$$

Čia rėmo pasiduodamumo matrica

$$[D] = \frac{L}{EI}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0{,}3333 & -0{,}1667 & & & \\ \hline -0{,}1667 & 0{,}5000 & -0{,}0833 & & \\ \hline & -0{,}0833 & 0{,}3333 & 0{,}0833 & \\ \hline & & 0{,}0833 & 0{,}5000 & -0{,}1667 \\ \hline & & & -0{,}1667 & 0{,}3333 \\ \hline\end{array},$$

o vektoriai $\mathbf{M}_{e,max}$= (0,2945 0,5890 1,1782 0 0)$^T$, $\mathbf{M}_{e,min}$= (–0,6200 –0,4650 0 –1,0541 –0,9145)$^T$ yra gauti, kai $F_{1,sup}$= 2,1700$M_0L^{-1}$, $F_{2,sup}$=7,0688$M_0L^{-1}$.

Uždavinys (32) realizuotas autorių sukurta netiesinių uždavinių sprendimo programa RUTAMINI (pagrindas – Rozeno projektuojamųjų gradientų metodas [5]). Taip iš karto gaunami uždavinio (32) pagrindiniai nežinomieji $\mathbf{M}_r^*$ = (–0,3793 0,4106 –0,1783 0,0540 –0,0853)$^T$, o pagal (9) formulę apskaičiuojami nenuliniai plastiniai daugikliai $\lambda^*_{3,max} = 1{,}0457$, $\lambda^*_{4,min} = 0{,}6995$, $\lambda^*_{5,min} = 0{,}1574$. Likusieji uždaviniui (32) dualaus uždavinio kintamieji $\mathbf{u}_r^*$ skaičiuojami pagal formulę $\mathbf{u}_r^* = [H]\boldsymbol{\lambda}^*$. Vektorius $\boldsymbol{\lambda}^*$ jungia $\boldsymbol{\lambda}^*_{\max}$ ir $\boldsymbol{\lambda}^*_{\min}$ ir jo komponentai yra priderinti prie $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_{max}, \boldsymbol{\varphi}_{min})$. Čia liekamųjų poslinkių influentinės matricos $[H]$ struktūra $[H] = [\overline{H}, -\overline{H}]$, kur

$$[\overline{H}] = L\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -0{,}2857 & -0{,}2143 & & -0{,}2143 & -0{,}2857 \\ \hline 0{,}0417 & 0{,}0833 & 0{,}1667 & -0{,}0833 & -0{,}0417 \\ \hline\end{array}$$

Taip apskaičiuoti rėmo būvio prieš pat ciklinį plastinį suirimą liekamieji poslinkiai $\mathbf{u}_r^*$ = (0,1949 0,2391)$^T$ (čia ir toliau poslinkių daugiklis $M_0L^2/EI$). Nesunku įsitikinti, kad tiesioginio uždavinio (32) sprendimu gauti liekamieji momentai $\mathbf{M}_r^*$ = (–0,3793 0,4106 –0,1783 0,0540 –0,0853)$^T$ galėtų būti patikrinti pagal formulę $\mathbf{M}_r^* = [G]\boldsymbol{\lambda}$. Čia liekamųjų momentų influentinės matricos $[G]$ struktūra tokia: $[G] = [\overline{G}, -\overline{G}]$, kur

$$[\overline{G}] = \frac{EI}{L}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -2{,}0952 & 0{,}0952 & 0{,}3333 & 0{,}7619 & 1{,}2381 \\ \hline 0{,}0952 & -1{,}0952 & 0{,}6667 & 0{,}2381 & 0{,}7619 \\ \hline 0{,}3333 & 0{,}6667 & -0{,}6667 & -0{,}6667 & -0{,}3333 \\ \hline 0{,}7619 & 0{,}2381 & -0{,}6667 & -1{,}0952 & 0{,}0952 \\ \hline 1{,}2381 & 0{,}7619 & -0{,}3333 & 0{,}0952 & -2{,}0952 \\ \hline\end{array}$$

**Pavyzdys 2.** Ieškomas $max(F_{1,sup} + F_{2,sup})$, kai duotos norminės (eksploatacinės) poslinkių reikšmės $\mathbf{u}_{r,max} = (0{,}14 \quad 0{,}16)^T$ ir $\mathbf{u}_{r,min} = (0 \quad 0)^T$. Poslinkiai $\mathbf{u}_r^*$ prieš pat ciklinį suirimą yra gerokai didesni (žr. 1 pavyzdį). Uždavinys sprendžiamas pagal matematinį modelį (31)–(35), kurio sąlygų – apribojimų kompozi-

**2 lentelė.** Uždavinio (31)–(35) kompozicija

**Table 2.** Composition of the problem (31)–(35)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{M}_0$ | $-[G]\boldsymbol{\lambda}$ | $-[\alpha_{sup}]\mathbf{F}$ | $\ge \mathbf{0}$ |
| $\mathbf{M}_0$ | $[G]\boldsymbol{\lambda}$ | $[\alpha_{inf}]\mathbf{F}$ | $\ge \mathbf{0}$ |
| | $\boldsymbol{\lambda}$ | | $\ge \mathbf{0}$ |
| | | $\mathbf{F}$ | $\ge \mathbf{0}$ |
| $\boldsymbol{u}_{r,max}$ | $-[H]\boldsymbol{\lambda}$ | | $\ge \mathbf{0}$ |
| $-\boldsymbol{u}_{r,min}$ | $[H]\boldsymbol{\lambda}$ | | $\ge \mathbf{0}$ |

cija yra pateikta 2 lentelėje. Netiesinės matematinio programavimo griežtumo sąlygos $\lambda^T \varphi = 0$ 2 lentelėje nepavaizduotos. Uždavinys išspręstas straipsnio autorių sukurta programa MERK1 (Rozeno algoritmas). Gautieji rezultatai papildomai patikrinti pagal atsitiktinės paieškos algoritmą [11]. Taigi gauta:

$$F_{1,sup}^* = 2{,}4652 M_0 L^{-1}, \quad F_{2,sup}^* = 6{,}5257 M_0 L^{-1},$$

$$\lambda^* = (0 \;\; 0 \;\; 0{,}6829 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0{,}4919 \;\; 0{,}1197)^T.$$

Liekamųjų momentų bei liekamųjų poslinkių reikšmės gaunamos naudojant matricas $[G]$ ir $[H]$: $\mathbf{M}_r = (-0{,}2956 \;\; 0{,}2473 \;\; -0{,}0876 \;\; 0{,}0721 \;\; -0{,}0237)^T$. $\mathbf{u}_r^* = (0{,}1396 \;\; 0{,}1600)$. Kintamos kartotinės apkrovos atveju sąlygos (35), kaip aptarta ankstesniuose poskyriuose, gali būti pažeistos dėl galimo „nusikrovimo". Tai patikrinama sprendžiant tiesinio programavimo uždavinį (11)–(12). Sprendžiant $u_{r1,sup}$ skaičiavimo uždavinį, pateiktą 3 lentelėje, naudojama energijos disipacijos

**3 lentelė.** Uždavinio (11)–(12) apribojimai

**Table 3.** Restraints of the problem (11)–(12)

| $\tilde{\lambda}_{1,min}$ | $\tilde{\lambda}_{2,max}$ | $\tilde{\lambda}_{3,max}$ | $\tilde{\lambda}_{4,min}$ | $\tilde{\lambda}_{5,min}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | – 1 | | | – 0,6838 |
| – 2 | – 1 | | 1 | | 0,4925 |
| – 1 | | | | 1 | 0,1198 |
| 1 | | | | | ≤0 |
| | 1 | | | | ≤0 |
| | | 1 | | | ≤0 |
| | | | 1 | | ≤0 |
| | | | | 1 | ≤0 |
| 0,9999 | 0,7911 | 1 | 1 | 1 | ≤ 1,2961 |
| 0,2857 | – 0,2143 | 0 | 0,2143 | 0,2857 | $u_{r1,max}$ |

maksimali reikšmė $\tilde{D}_{max} = 1{,}2945 M_0^2 L / EI$. Ši disipacija gauta, siekiant rėmo prisitaikymo būvio, kai jėgų viršutinės kitimo ribos yra $F_{1,sup}^* = 2{,}4659 M_0 L^{-1}$, $F_{2,sup}^* = 6{,}5243 M_0 L^{-1}$. 3 lentelės pirmosios trys eilutės skirtos deformacijų darnos lygtims $[B_\lambda]\tilde{\lambda} = [B_r]\mathbf{M}_r^*$, o matrica $[B_r]$ yra tokia:

$$[B_r] = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}4167 & 0{,}5 & 0{,}0833 & 0 \\ -0{,}8333 & 0{,}8333 & 0 & 0{,}5 & -0{,}1667 \\ -0{,}3333 & 0{,}1667 & 0 & -0{,}1667 & 0{,}3333 \end{bmatrix}$$

Gautos tos pačios poslinkių $\mathbf{u}_{r,sup}^* = (0{,}1398 \;\; 0{,}1600)^T$ reikšmės, kaip ir sprendžiant uždavinį (31)–(35). Kadangi sprendžiant uždavinį (11)–(12) buvo gautas neišsigimęs sprendinys $\tilde{\lambda}_{3,\max} = 0{,}6838$, $\tilde{\lambda}_{4,\min} = 0{,}4925$, $\tilde{\lambda}_{5,\min} = 0{,}1198$, galima teigti, jog „nusikrovimo" nėra.

## 6. Išvados

Dvejopai formuluojamuose prisitaikiusios konstrukcijos apkrovos optimizacijos uždavinių matematiniuose modeliuose lemiančios sąlygos yra standumo apribojimai. Rozeno algoritmo optimalumo kriterijaus matematinė-mechaninė interpretacija leidžia sukurti naują optimizacijos uždavinio sprendimo algoritmą. Matematinio programavimo griežtumo sąlyga neleidžia atsižvelgti į konstrukcijos kai kurių pjūvių „nusikrovimo" reiškinį. Liekamųjų deformacijų darnos lygčių analizė, naudojant tiesinį matematinį programavimą, leidžia tiksliau apskaičiuoti liekamųjų poslinkių kitimo ribas. Išryškintas ryšys tarp matematinio programavimo teorijos ir prisitaikančių konstrukcijų uždavinių formuluočių.

## Literatūra


1. P. Lange-Hansen. Comparative Study of Upper Bound Methods for the Calculation of Residual Deformations After Shakedown. Lyngby: Technical university of Denmark, 1998. 75 p.
2. F. Giambaco, L. Palizzolo, C. Plolizzotto. Optimal shakedown design of beam structures // Structural Optimization 8. Germany, Berlin: Springer–Verlag, 1994, p. 156–167.
3. E. Stein, G. Zhang, R. Mahnken. Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials // CISM. Progress in Computernal Analysis or Inelastic Structures. Wien, New York: Springer Werlag, 1993, p. 175–244.
4. J. Atkočiūnas. Mathematical models of optimization problems at shakedown // Mechanics Research Communications, 26, No 3, 1999, p. 319–326.
5. Mokhtar S. Bazaraa, C. M. Shetty. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley, 1979. 283 p.
6. Э. В. Храпгович, Ю. Ю. Аткочюнас. Роль условий Куна-Таккера в формулировке уравнений теории упругости в напряжениях // Statyba, VI t., Nr. 2, Vilnius: Technika, 2000, p. 104–112.
7. E. Jarmolajeva, V. Skaržauskas, J. Atkočiūnas. Prisitaikančių konstrukcijų optimizacija: projektuojamųjų gradientų metodas ir kriterijų analizė // Tarpt. konf. „Mechanika-2001" pranešimų medžiaga. Kaunas: Technologija, 2001, p. 166–171.
8. J. Atkočiūnas, A. Norkus, L. Rimkus. Distortion in mechanics of elastic and elastic-plastic frames // Computer and Structures, Vol 62, No 5, 1997, p. 861–864.

9. В. Ю. Скаржаускас, Ю. Ю. Аткочюнас, Э. В. Храптович. Оптимизация нагрузки в строительной механике упругопластических рам // Сборник научных трудов «Разработка и исследование металлических и деревянных конструкций». Казань, КГАСА, 1999, с. 56–62.

10. С. Каланта. Новые постановки задач оптимизации упруго-пластических стержневых систем при ограниченных перемещениях // Mechanika, Nr. 5 (20). Kaunas: Technologija, 1999, p. 9–16.

11. J. Mockus, W. Eddy, A. Mockus, L. Mockus, G. Reklaitis. Bayesan heuristic approach to discrete and global optimization. Algoritms, visualisation, software and applications. Kluwer Academic Publichers. Boston/London/Dordrecht, 1996. 396 p.

Įteikta 2001 10 22

**LOAD OPTIMIZATION OF ELASTIC-PLASTIC FRAMES AT SHAKEDOWN**

**V. Skaržauskas, D. Merkevičiūtė, J. Atkočiūnas**

Summary

In this article the theory of mathematical programming is used, composing improved mathematical models of non-linear problems of frame loading optimization at shakedown and performing its numerical experiment.

An elastic perfectly-plastic frame is considered. Frame geometry, material, load application places are considered known. Time independent load variation bounds are variable (history of loading is unknown). Mathematical model of load variation bounds optimization problem includes strength and stiffness constrains.

The mentioned optimization load combines two problems. First problem is connected with the distribution of statically admissible moments at shakedown. This is a problem of residual bending moments analysis which is presented in two ways. In the first case it is formulated as a quadratic programming problem, where the objective function is non-linear, but the objective function of load optimization problem remains linear. The problem is solved by iterations, influential matrixes of residual displacements, and stresses are used. In next case, the equations of problem analysis and dependences are presented according to complete equation system of plasticity theory. Then the objective function of optimization problem becomes non-linear and it is solved in single stage.

Solving the second problem, we check if it is possible to satisfy frame rigidity constrains, which are inferior or superior limits of residual displacement. This is considered as a linear programming problem.

Mathematical model of frame load optimization problem at shakedown was made with the help of non-linear mathematical programming theory. Numerical experiment was realized with Rozen's gradients projecting method and using the penalty function techniques.

Mathematical programming complementarity conditions prohibit taking into account the dechargable phenomena in some cross-sections, therefore analysis of residual deformation compatibility equations are performed, using linear mathematical programming.

**Valentinas SKARŽAUSKAS.** Doctor, Associate Professor. Dept of Structural Mechanics. Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: Valentinui@hotmail.com

Civil engineer (1974). Doctor Engr (1982, structural mechanics). Research interests: analysis and optimization of elastic-plastic structures.

**Dovilė MERKEVIČIŪTĖ.** PhD student. Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania.
E-mail: dovile.merk@centras.lt

Civil engineer (1999). MSc (2001). Research interests: structural mechanics, optimization of elastic-plastic structures under repeated-variable loading.

**Juozas ATKOČIŪNAS.** Doctor Habil, Professor. Head of Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: Juozas.Atkociunas@st.vtu.lt

Civil engineer (1967). Doctor Engr (structural mechanics, 1973). Dr Habil (mechanics, 1996). Research interests: structural and computational mechanics, applied mathematical programming, analysis and optimization of dissipative structures under repeated-variable loading.