ISSN 1392–1541 Geodezija ir kartografija, 2004, XXX t., Nr. 1
Geodesy and Cartography, 2004, Vol XXX, No 1

UDK 528.14

ELIPSOIDINIŲ IR NORMALINIŲ AUKŠČIŲ SĄSAJA, TAIKANT KOLOKACIJOS METODĄ

Jonas Skeivalas, Žilvinas Stankevičius
Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lietuva, el. paštas: gkk@ap.vtu.lt

Įteikta 2003 12 15, priimta 2004 02 10

Santrauka. Straipsnyje analizuojami normalinių aukščių prognozės modeliai, sudaryti kolokacijos metodu, įtraukiant GPS matavimais nustatytus elipsoidinius aukščius. Prognozės modeliams sudaryti išvedamos lygčių sistemos, taikant atitinkamos eilės daugianarius. Optimalaus prognozės modelio parametrų reikšmės gaunamos pagal statistinius elipsoidinių ir normalinių aukščių nuokrypius identiškuose taškuose, keičiant daugianarių eilę ir elipsoidinių bei normalinių aukščių svorių matricos elementus. Pateikiamos formulės elipsoidinių aukščių klaidų įtakai prognozės modelio parametrų bei normalinių aukščių tikslumui įvertinti.

Raktažodžiai: elipsoidiniai ir normaliniai aukščiai, prognozavimas, kolokacija, kovariacija, GPS, geoidas.

1. Įvadas

Geodezijos praktikoje remiamasi niveliavimo metodu nustatytais normaliniais aukščiais. Niveliavimo procedūroms atlikti tenka skirti nemažai lėšų ir laiko. Todėl atliekami įvairūs moksliniai ir praktiniai tyrimai siekiant susieti normalinius bei elipsoidinius aukščius, nustatomus GPS (globalinių padėties nustatymo sistemų) metodu [1–4]. GPS metodas ekonomiškesnis laiko požiūriu ir nepriklauso nuo veiksnių, turinčių įtakos niveliavimo procesui. Elipsoidiniai aukščiai nustatomi pagal klaidas, kurių reikšmės esti keletas centimetrų. Toks tikslumas pakankamas kartografiniuose bei inžineriniuose darbuose. Kadangi normaliniai aukščiai skaičiuojami nuo kvazigeoido paviršiaus, kyla nauja problema – elipsoidinius aukščius transformuoti į normalinių aukščių sistemą. Tokią aukščių sistemų tarpusavio sąsają būtų įmanoma pakankamu tikslumu realizuoti, jei būtų sudarytas pakankamai detalus ir tikslus kvazigeoido modelis. Tačiau tokiam kvazigeoido modeliui sudaryti reikia atlikti pakankamai daug ir tikslių gravimetrinių matavimų [2, 3].

Šiame straipsnyje pateikiamas normalinių ir elipsoidinių aukščių sąsajos metodas, taikant atitinkamus prognozavimo modelius [5–8].

Prognozavimo modelių parametrų reikšmės apskaičiuojamos kolokacijos metodu, naudojant identiškuose taškuose išmatuotus normalinius ir elipsoidinius aukščius. Apskaičiuotos parametrų reikšmės tikslinamos taikant Kalmano filtravimo procedūrą.

2. Prognozavimo modelio parametrų reikšmių skaičiavimas

Prognozavimo modeliams sudaryti taikysime tiesinių lygčių sistemą, kurios kiekvienos lygties pagrindinės dedamosios yra sisteminė dalis, arba trendas, ir atsitiktinė dalis, arba kolokacinis signalas. Trendą apibrėšime tam tikrais nežinomaisiais, vadinamais parametrais. Kaip kolokacinius signalus naudosime normalinius aukščius, kurie yra atsitiktiniai dydžiai, nes išmatuojami su tam tikromis klaidomis, turinčiomis sisteminę ir atsitiktinę dedamąsias.

Prognozavimo modelio parametrų reikšmėms skaičiuoti taikysime tiesinį modelį, užrašomą lygčių sistema:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{H}_e &= (A\,|\,U)\tilde{T} = A\tilde{T}_x + U\tilde{H}_n \\ \tilde{H}_n &= \tilde{H}_n \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

čia $\tilde{T} = \left(\tilde{T}^T, \tilde{H}_n^T\right)^T$ – blokinis parametrų vektorius, $\tilde{H}_e$ – išlygintų elipsoidinių aukščių vektorius, $\tilde{T}_x$ – determinuotųjų parametrų išlygintų reikšmių vektorius, $\tilde{H}_n$ – išlygintų normalinių aukščių vektorius; A, U – atitinkamų lygčių koeficientų matricos.

Tiesinio modelio (1) parametrų ir kolokacinių signalų išlygintų reikšmių vektoriai $\tilde{T}_x$ ir $\tilde{H}_n$ gaunami apdorojus mažiausiųjų kvadratų metodu identiškuose taškuose išmatuotų elipsoidinių H_e bei normalinių aukščių H_n ir vektorių reikšmes.

Lygčių sistemą (1) rašome pataisų lygčių sistemos pavidalu:

$$\left.\begin{aligned} V_e &= A\tilde{T}_x + U\tau_n + UH_n - H_e \\ V_n &= \tau_n \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

čia $V_e = \tilde{H}_e - H_e$, $\tau_n = \tilde{H}_n - H_n$.

Sistemą (2) galime parašyti blokiniu pavidalu:

$$V=\begin{pmatrix}A & U\\ 0 & E\end{pmatrix}\tau+L=A_0\tau+L, \qquad (3)$$

čia $\tau=\left(\tilde{T}_x^T,\tau_n^T\right)^T$, $L=\left(L_1^T,0\right)^T$, $L_1=UH_n-H_e$, E – vienetinė matrica; $V=\left(V_e^T,V_n^T\right)^T$, $A_0=\begin{pmatrix}A & U\\ 0 & E\end{pmatrix}$.

Pataisų lygčių sistemai (3) spręsti taikoma mažiausiųjų kvadratų metodo sąlyga, darant prielaidą, kad veikia tik atsitiktinės atitinkamų dydžių klaidos:

$$\Phi=V_e^TP_eV_e+V_n^TP_nV_n=\min, \qquad (4)$$

čia P_e, P_n – išmatuotų elipsoidinių ir normalinių aukščių svorių matricos.

Parametrų vektorius τ skaičiuojamas iš normalinių lygčių sistemos:

$$N\tau+\omega=0$$

ir $$\tau=-N^{-1}\omega, \qquad (5)$$

čia $N=A_0^TPA_0$ – normalinių lygčių koeficientų matrica, $\omega=A_0^TPL$ – laisvųjų narių vektorius.

Svorių matricos P ir laisvųjų narių vektoriaus ω išraiškos:

$$P=\begin{pmatrix}P_e & \\ & P_n\end{pmatrix},$$

$$\omega=\begin{pmatrix}A^T & P_e\\ U^T & P_e\end{pmatrix}L_1.$$

Normalinių lygčių koeficientų matricą N galima užrašyti blokiniu pavidalu:

$$N=\begin{pmatrix}N_{11} & N_{12}\\ N_{21} & N_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & U\\ 0 & E\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}P_e & \\ & P_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & U\\ 0 & E\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{A^TP_eA}{U^TP_eA} & \dfrac{A^TP_eU}{U^TP_eU+P_n}\end{array}\right). \qquad (6)$$

Apskaičiuotų parametrų vektoriaus $\tilde{T}$ kovariacijų matrica $K_{\tilde{T}}$ gaunama mažiausiųjų kvadratų metodu pagal formulę:

$$K_{\tilde{T}}=\sigma_0^2N^{-1}=\sigma_0^2\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

čia σ_0 – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis. Jis nustatomas iš formulės:

$$\sigma_0^2=\frac{1}{n-k}V^TPV,$$

čia n – pataisų lygčių skaičius, k – parametrų (nežinomųjų) skaičius.

Išlygintų parametrų vektoriaus $\tilde{T}$ reikšmė gaunama iš formulės [9]:

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix}\tilde{T}_x\\ \tau_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}Q_{11}A^TP_e+Q_{12}P_e\\ Q_{21}A^TP_e+Q_{22}P_e\end{pmatrix}L_1. \qquad (8)$$

Vektoriaus $\tilde{T}$ dedamųjų $\tilde{T}_x$ ir τ_n išraiškas galima užrašyti kitokiu pavidalu [5]:

$$\tilde{T}_x=\left\{A^T\left(UP_n^{-1}U^T+P_e^{-1}\right)^{-1}A\right\}^{-1}\times$$
$$\times A^T\left(UP_n^{-1}U^T+P_e^{-1}\right)^{-1}L_1, \qquad (9)$$

$$\tau_n=-P_n^{-1}U^T\left(UP_n^{-1}U^T+P_e\right)^{-1}\left(L_1+A\tilde{T}_x\right). \qquad (10)$$

Išlygintų parametrų vektoriaus $\tilde{T}_x$ ir normalinių aukščių $\tilde{H}_n$ kovariacijų bei jų tarpusavio kovariacijų matricas gauname blokinių matricų pavidalu iš išraiškos (7):

$$\left.\begin{array}{l}K_{\tilde{T}_x}=\sigma_0^2Q_{11}\\ K\begin{pmatrix}\tilde{T}_x\\ \tilde{H}_n\end{pmatrix}=\sigma_0^2Q_{12}\\ K\begin{pmatrix}\tilde{H}_n\\ \tilde{T}_x\end{pmatrix}=K^T\begin{pmatrix}\tilde{T}_x\\ \tilde{H}_n\end{pmatrix}=\sigma_0^2Q_{21}\\ K_{\tilde{H}_n}=K_{\tau_n}=\sigma_0^2Q_{22}\end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Vektorių $\tilde{T}_x$ ir $\tilde{H}_n$ tarpusavio kovariacijų matrica $K\begin{pmatrix}\tilde{T}_x\\ \tilde{H}_n\end{pmatrix}$ parodo parametrų vektoriaus $\tilde{T}_x$ klaidų įtaką vektoriaus $\tilde{H}_n$ tikslumui. Nustatysime, kokią įtaką vektoriaus $\tilde{H}_n$ tikslumui turi vektoriaus $\tilde{H}_e$ matavimų klaidos, t. y. gausime vektorių $\tilde{H}_n$ ir $\tilde{H}_e$ tarpusavio kovariacijų matricos išraišką $K\begin{pmatrix}\tilde{H}_n\\ \tilde{H}_e\end{pmatrix}$. Taigi galime parašyti:

$$K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e\\ \tilde{T}\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e\\ \tilde{T}_x\end{pmatrix}\Bigg|K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e\\ \tilde{H}_n\end{pmatrix}=$$
$$=M\left\{\left(\tilde{H}_e-M\tilde{H}_e\right)\left(\tilde{T}-M\tilde{T}\right)^T\right\}=M\left\{\delta\tilde{H}_e\cdot\left(\delta\tilde{T}\right)^T\right\}=$$
$$=M\left\{(AU)\delta\tilde{T}\cdot\left(\delta\tilde{T}\right)^T\right\}=(AU)K_{\tilde{T}}, \qquad (12)$$

čia M – vidurkio (matematinės vilties) simbolis, $\delta\tilde{H}_e, \delta\tilde{T}$ – išlygintų elipsoidinių aukščių ir parametrų atsitiktinių klaidų vektoriai.

Taikydami kovariacijų matricos $K_{\tilde{T}}$ išraišką (7), formulę (12) parašome tokiu pavidalu:

$$K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e\\ \tilde{T}\end{pmatrix}=\sigma_0^2(AU)\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}=$$
$$=\sigma_0^2\left\{AQ_{11}+UQ_{21}\middle|AQ_{12}+UQ_{22}\right\}. \qquad (13)$$

Gauname:

$$K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e \\ \tilde{T}_x\end{pmatrix} = AQ_{11} + UQ_{21} \tag{14}$$

ir

$$K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e \\ \tilde{H}_n\end{pmatrix} = AQ_{12} + UQ_{22}. \tag{15}$$

Išlygintų elipsoidinių aukščių $\tilde{H}_e$ kovariacijų matricą $K_{\tilde{H}_e}$ galima išreikšti tokiu pavidalu:

$$K_{\tilde{H}_e} = (AU)K_{\tilde{T}}(AU)^T = AQ_{11}A^T + UQ_{21}A^T + \\ + AQ_{12}U^T + UQ_{22}U^T. \tag{16}$$

3. Prognozės modelio formavimas

Daroma prielaida, kad tam tikros teritorijos kvazigeoido paviršiaus kaita atitinka pasirinktą prognozės modelį, kai taikomas apskaičiuotų parametrų reikšmių vektorius $\tilde{T}_x$. Tokiu atveju normalinių aukščių vektoriui skaičiuoti galima taikyti prognozės formulę

$$H_{nS} = H_e - A_S\tilde{T}_x, \tag{17}$$

čia H_e – tam tikroje geodezinio tinklo dalyje išmatuotų elipsoidinių aukščių vektorius; A_S – prognozės lygčių daugianarių koeficientų matrica, sudaroma taikant prognozavimo taškų koordinates.

Prognozuojamų normalinių aukščių vektoriaus H_{nS} tikslumas įvertinamas kovariacijų matrica $K_{H_{nS}}$, gaunama remiantis matematinės statistikos dėsniais:

$$K_{H_{nS}} = \left\{(H_{nS} - MH_{nS})(H_{nS} - MH_{nS})^T\right\}. \tag{18}$$

Toliau galime parašyti:

$$K_{H_{nS}} = M\left\{\left(\delta H_e - A_S\delta\tilde{T}_x\right)\left(\delta H_e - A_S\delta\tilde{T}_x\right)^T\right\} = \\ = K_{H_e} - K\begin{pmatrix}H_e \\ \tilde{T}_x\end{pmatrix}A_S^T - A_S K\begin{pmatrix}\tilde{T}_x \\ H_e\end{pmatrix} + A_S K_{\tilde{T}_x} A_S^T. \tag{19}$$

GPS metodu išmatuotų elipsoidinių aukščių kovariacijų matricos K_{H_e} įvertis K'_{H_e} nustatomas apdorojant GPS matavimų rezultatus.

Parametrų vektorius $\tilde{T}_x$ ir jo kovariacijų matrica $K_{\tilde{T}_x}$ (11) priklauso nuo kvazigeoido paviršiaus ir nuo vektoriaus H_e. Kadangi prognozuojamų taškų srityje kovariacijų matricos $K\begin{pmatrix}H_e \\ \tilde{T}_x\end{pmatrix} = K^T\begin{pmatrix}\tilde{T}_x \\ H_e\end{pmatrix}$ apskaičiuoti neįmanoma, darome prielaidą, kad ji mažai skiriasi nuo atliekant kolokacijos procedūras nustatytos kovariacijų matricos $K\begin{pmatrix}\tilde{H}_e \\ \tilde{T}_x\end{pmatrix}$, apskaičiuojamos pagal formulę (14). Tokią prielaidą būtų teisinga daryti kalbant apie teritorijas, kuriose gravitacijos laukas yra reguliarus. Tokia teritorija galima laikyti Lietuvos teritoriją.

Teorinius samprotavimus iliustruosime praktiniais skaičiavimais. Tam tikslui panaudosime Lietuvos 1-osios klasės vertikaliojo tinklo matavimų rezultatus ir nustatytus šio tinklo reperių elipsoidinius aukščius bei jų koordinates LKS 94 sistemoje.

1 lentelė. Parametrų vektoriaus T_x komponenčių reikšmės
Table 1. Values of the components of the vector T_x

Parametro simbolis	5-ių parametrų variantas	9-ių parametrų variantas
T_{1x}	0,000066922000000	–0,007508500000000
T_{2x}	0000005248400000	0,053372000000000
T_{3x}	–0,000000000039583	0,000000014540000
T_{4x}	–0,000000000037936	–0,000000055533000
T_{5x}	–0,000000000008095	–0,000000095028000
T_{6x}		–0,000000000000007
T_{7x}		0,000000000000008
T_{8x}		0,000000000000042
T_{9x}		0,000000000000053

Prognozavimo modelio (17) parametrų vektoriaus T_x reikšmės skaičiuotos dviem variantais: 5-ių ir 9-ių komponenčių. Vektoriaus T_x komponentės buvo nustatytos apdorojus mažiausiųjų kvadratų metodu 50-ies identiškų taškų (žr. pav.) elipsoidinių aukščių H_e ir normalinių aukščių H_n matavimais gautas reikšmes. Tam tikslui taikyta lygčių sistema (3), kai $U = E$ ir

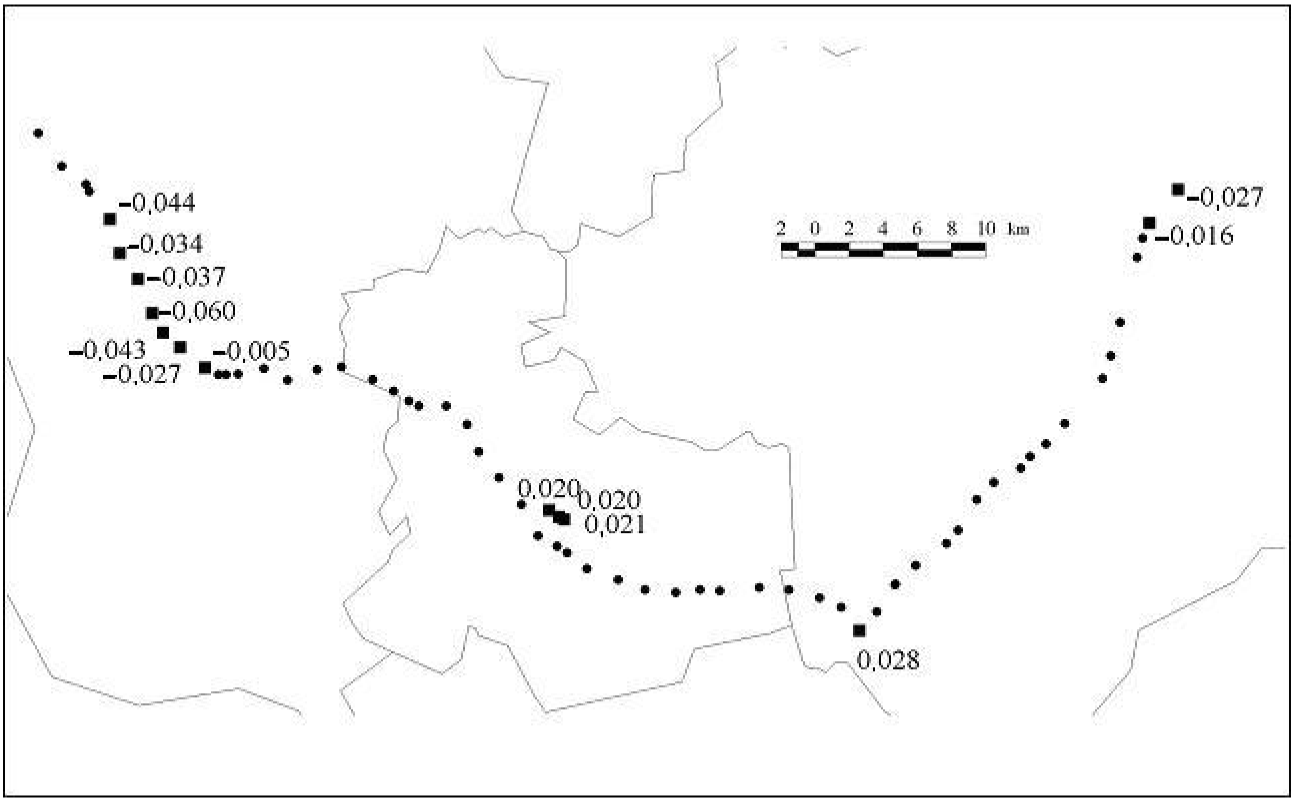
$$A_i = x_i t_{1x} + y_i t_{2x} + x_i^2 t_{3x} + y_i^2 t_{4x} + x_i y_i t_{5x}, \tag{20}$$

$$A_i = x_i t_{1x} + y_i t_{2x} + x_i^2 t_{3x} + y_i^2 t_{4x} + x_i y_i t_{5x} + \\ + x_i^3 t_{6x} + y_i^3 t_{7x} + x_i^2 y_i t_{8x} + x_i y_i^2 t_{9x}, \tag{21}$$

čia A_i – matricos A blokai. Formulėje (20) naudojami 5, o formulėje (21) – 9 parametrai. Apskaičiuotų parametrų reikšmės parodytos 1 lentelėje.

Taikydami gautąsias parametrų t_{ix} reikšmes ir prognozės formulę (17) nustatome prognozuojamąsias 13-os kontrolinių taškų normalinių aukščių H_{nS} reikšmes (2 ir 3 lentelės; pav. – pavaizduota kvadratėliais). 2 ir 3 lentelėse duoti prognozinių normalinių aukščių H_{nS} nuokrypiai δH nuo normalinių aukščių H_n, nustatytų precizinio niveliavimo metodu.

Prognozinių normalinių aukščių H_{nS} tikslumas įvertintas skaičiuojant standartinių nuokrypių įverčius:



GPS ir vertikaliojo tinklo sąsajų schema
The diagram of the GPS and vertical network connections

$$m_H = \sqrt{\frac{\sum_1^{13} (\delta H)^2}{n-1}}. \quad (22)$$

Taikydami 5-ių parametrų modelį gavome $m_{H,5} = 0{,}034$ m, o taikydami 9-ių parametrų modelį – $m_{H,9} = 0{,}24$ m. Nustatyta, kad normalinių aukščių H_n svorių įtaka prognozės modelio parametrų vektoriaus reikšmių tikslumui nedidelė.

2 lentelė. Normalinių aukščių prognozavimas, taikant 5-ių parametrų modelį
Table 2. Prognosis of the normal heights applying the model of 5 parameters

Taško Nr.	Elipsoidiniai aukščiai H_e, m	Normaliniai aukščiai H_n, m	Prognozuojamieji normaliniai aukščiai H_{ns}, m	$\delta H = H_n - H_{ns}$, m
52V10045	180,481	153,577	153,621	–0,044
52V-0551	166,782	139,867	139,901	–0,034
52V10058	159,572	132,643	132,680	–0,037
51V-7639	157,136	130,166	130,226	–0,060
51V10064	159,165	132,203	132,246	–0,043
51V10061	151,661	124,713	124,740	–0,027
51V--317	160,440	133,511	133,516	–0,005
51V15101	127,750	100,936	100,916	0,020
51V15102	122,360	95,547	95,527	0,020
51V15103	124,300	97,489	97,468	0,021
61V-0398	159,946	133,254	133,226	0,028
62V-0119	153,319	127,096	127,112	–0,016
62V10027	154,907	128,722	128,749	–0,027

3 lentelė. Normalinių aukščių prognozavimas, taikant 9-ių parametrų modelį
Table 3. Prognosis of the normal heights applying the model of 9 parameters

Taško Nr.	Elipsoidiniai aukščiai H_e, m	Normaliniai aukščiai H_n, m	Prognozuojamieji normaliniai aukščiai H_{ns}, m	$\delta H = H_n - H_{ns}$, m
52V10045	180,481	153,577	153,387	0,190
52V0551	166,782	139,867	139,643	0,224
52V10058	159,572	132,643	132,423	0,220
51V7639	157,136	130,166	129,977	0,189
51V10064	159,165	132,203	132,008	0,195
51V10061	151,661	124,713	124,513	0,200
51V317	160,440	133,511	133,304	0,207
51V15101	127,750	100,936	100,692	0,244
51V15102	122,360	95,547	95,303	0,244
51V15103	124,300	97,489	97,244	0,245
61V0398	159,946	133,254	133,009	0,245
62V0119	153,319	127,096	126,861	0,235
62V10027	154,907	128,722	128,429	0,293

4. Išvados

1. Rekomenduojamos formulės (17), (19) normalinių aukščių prognozės modeliui sudaryti ir tikslumui įvertinti, taikant GPS metodu išmatuotus elipsoidinius aukščius.

2. Prognozės modelio parametrų reikšmės nustatomos apdorojus kolokacijos metodu identiškuose taškuose išmatavus gautas elipsoidinių ir normalinių aukščių reikšmes. Kadangi parametrų reikšmės priklauso nuo nagrinėjamos teritorijos kvazigeoido paviršiaus kaitos, tikslinga modelio parametrų reikšmes nustatyti tam tikrų regionų, kuriuose kvazigeoido paviršiaus kaita yra reguliari.

3. Prognozės modelio tikslumas įvertintas dviem analizės variantais: taikant 5-osios ir 9-osios eilių daugianarių koeficientų matricas. Normalinių aukščių reikšmės tikslesnės taikant 5-osios eilės daugianarius. Normalinių aukščių reikšmių standartinių nuokrypių įverčiai maždaug atitinka GPS metodu nustatytų elipsoidinių aukščių standartinių nuokrypių įverčius.

Literatūra

1. Łyszkowicz, S. Interpolation techniques to convert GPS ellipsoid heights to elevations. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXVIII, No 3. Vilnius: Technika, 2002, p. 105–107.
2. Paršeliūnas, E.; Sacher, M.; Ihde, J. Preparation of Lithuanian levelling network data for united European levelling network. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXVI, No 4. Vilnius: Technika, 2000, p. 171–186.
3. Denker, H.; Paršeliūnas, E. Evaluation of the European gravimetric geoid / Quasigeoid EGG97 over the Lithuanian territory. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXV, No 4. Vilnius: Technika, 1999, p. 167–173.
4. Ardlan, A.; Grafarend, E.; Kakkuri, J. National height datum, the Gauss-Listing geoid level value $\overset{*}{W_0}$ and its time variation $\overset{*}{W_0}$ (Baltic Sea Level Project: epochs 1990.8, 1993.8, 1997.4). *Journal of Geodesy,* Vol 76, No 1. Berlin: Springer Verlag, 2002, p. 1–28.
5. Koch, K-R. Einführung in die Bayes-Statistik. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 225 S.
6. Moritz, H. Advanced Physical Geodesy. Karlsruhe: H. Wichmann Verlag, 1980. 390 S.
7. Wolf, H. Zur Grundlegung der Kollokationsmethode. Z. F. Vermessungswessen, 1977, Heft 6. Stuttgart, Verlag K. Witwer, p. 17–24.
8. Fisher, B.; Hegland, M. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression, Part 1. Z. F. Vermessungswessen, 1999, Helf 1. Stuttgart, Verlag, K. Witwer, p. 17–24.
9. Skeivalas, J. Treatment of correlated geodetic measurements results (Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų apdorojimas). Vilnius: Technika, 1995. 272 p.