ISSN 1392–1541 Geodezija ir kartografija, 2005, XXXI t., Nr. 2
Geodesy and Cartography, 2005, Vol XXXI, No 2

UDK 528.14

ERDVINIŲ GEODEZINIŲ KOORDINAČIŲ TRANSFORMAVIMO ALGORITMŲ TIKSLUMAS

Jonas Skeivalas

Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lietuva,
el. paštas: Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt

Įteikta 2005 01 05, priimta 2005 04 06

Santrauka. Straipsnyje analizuojamas erdvinių geodezinių koordinačių, gautų transformuojant jas iš vienos koordinačių sistemos į kitą, tikslumas. Transformavimo parametrų reikšmės apskaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu. Transformavimo parametrų bei transformuotų į naująją koordinačių sistemą taškų erdvinių koordinačių tikslumas nustatomas atsižvelgiant į identiškų taškų koordinačių abiejose sistemose tikslumą. Ligšiolinėse egzistuojančiose transformavimo parametrų tikslumo įvertinimo formulėse atsižvelgiama tik į naujosios sistemos identiškų taškų koordinačių tikslumą. Nustatyta, kad į naująją sistemą transformuotų erdvinių koordinačių tikslumas yra mažesnis už senosios sistemos koordinačių tikslumą. Pateikiamos formulės transformavimo parametrų ir transformuotų erdvinių koordinačių kovariacijų matricoms bei jų įverčiams skaičiuoti.

Raktažodžiai: transformavimo parametrai, kovariacija.

1. Įvadas

Geodezinių koordinačių transformavimas iš vienos koordinačių sistemos į kitą taikomas geodezinių tinklų sudarymo, kartografavimo darbuose, geoinformacinių sistemų, skaitmeninių žemėlapių kūrimo, inžinerinės geodezijos, kadastro uždaviniuose ir kt. [1–6]. Geodezinių tinklų taškų erdvinėms koordinatėms transformuoti iš senosios sistemos į naująją naudojami identiški taškai, kurių koordinatės žinomos abiejose sistemose. Remiantis šiais taškais apskaičiuojamos transformavimo parametrų reikšmės, tada pagal atitinkamas formules skaičiuojamos koordinatės naujojoje sistemoje. Straipsnyje nagrinėjama, kokiu tikslumu transformuojamos koordinatės. Jų tikslumas priklauso nuo abiejų sistemų identiškų taškų koordinačių tikslumo bei nustatytų transformavimo parametrų tikslumo. Įprastinėse transformavimo procedūrose atsižvelgiama tik į naujosios sistemos identiškų taškų koordinačių tikslumą. Dažnais atvejais identiškų taškų koordinačių svorių matrica laikoma lygi vienetinei matricai.

Straipsnyje analizuojama identiškų taškų koordinačių senojoje bei naujojoje sistemose klaidų įtaka apskaičiuotų transformavimo parametrų tikslumui. Gauta transformuotų koordinačių kovariacijų matricos išraiška. Nustatytas transformuotų koordinačių tikslumas, įvertinant senosios sistemos koordinačių bei transformavimo parametrų klaidų įtaką.

2. Transformavimo parametrų tikslumo analizė

Erdvinių koordinačių transformavimo parametrams nustatyti taikomas mažiausiųjų kvadratų metodas. Koordinačių transformavimo tikslumas priklauso nuo keleto rodiklių: senosios sistemos taškų koordinačių tikslumo, nustatytųjų transformavimo parametrų tikslumo, kuris savo ruožtu priklauso nuo identiškų taškų naujojoje ir senojoje sistemose koordinačių tikslumo. Identiški taškai naudojami transformavimo parametrams, kurių yra 7, nustatyti. Minimalus identiškų taškų skaičius turi būti 3. Naudojant daugiau identiškų taškų gaunami tikslesni transformavimo parametrai. Erdvinių koordinačių transformavimo lygčių sistema yra netiesinė, todėl praktiniuose skaičiavimuose ji linearizuojama ir užrašoma taip:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}}' = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{i} = 1, 2, ..., \boldsymbol{n} \end{array}\right\}, \tag{1}$$

čia $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}}' = \left(x_i', y_i', z_i'\right)^T$ – i-ojo taško koordinačių vektorius naujojoje sistemoje, $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}} = \left(x_i, y_i, z_i\right)^T$ – i-ojo taško koordinačių vektorius senojoje sistemoje, $\boldsymbol{\tau} = \left(x_0 y_0 z_0 \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z m\right)^T$ – transformavimo parametrų vektorius, n – identiškų taškų skaičius, kai skaičiuojami transformavimo parametrai.

Matrica

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}} = \left(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}'\right) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{array}\right), \tag{2}$$

čia $\boldsymbol{E}$ – vienetinė matrica.

Analizuosime minėtųjų rodiklių įtaką erdvinių į naująją sistemą transformuotų koordinačių tikslumui. Kiekvienu atveju nustatysime transformuotų koordinačių kovariacijų matricų išraiškas.

Transformavimo parametrų reikšmes skaičiuojant mažiausiųjų kvadratų metodu sudaroma pataisų lygčių sistema

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{L}, \tag{3}$$

čia $\boldsymbol{V}$ – koordinačių pataisų naujojoje sistemoje vektorius, $\boldsymbol{L} = \left(\boldsymbol{L}_1^{\boldsymbol{T}} \ldots \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{T}}\right)^{\boldsymbol{T}}$ – laisvųjų narių vektorius, $\boldsymbol{L_i} = \boldsymbol{T_i} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}}'$. Pataisų lygčių koeficientų matrica $\boldsymbol{A}$ sudaryta iš blokų

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ reikšmė gaunama sprendžiant sudarytą normalinių lygčių sistemą

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{5}$$

ir toliau –

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{\omega}, \tag{6}$$

čia $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{L}$ – laisvųjų narių vektorius, $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}$ – naujosios sistemos identiškų taškų koordinačių svorių matrica.

Skaičiavimų apimčiai sumažinti galima taikyti senosios ir naujosios koordinačių sistemų identiškų taškų centruotąsias koordinates. Abiejų koordinačių sistemų pradžia perkeliama į savus centrus $\boldsymbol{T}_c' = \left(x_c' \, y_c' \, z_c'\right)^T$, $\boldsymbol{T}_c = \left(x_c \, y_c \, z_c\right)^T$.

Įvertinsime apskaičiuotų transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ bei išlygintųjų identiškų naujosios sistemos taškų koordinačių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ tikslumą kovariacijų matricų $\boldsymbol{K}_\tau$ ir $\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'}$ pavidalu. Įprastinių formulių išraiškos atrodo taip [5]:

$$\boldsymbol{K}_\tau = \sigma_0^2 \boldsymbol{N}^{-1} = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_\tau, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'} = \sigma_0^2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'}, \tag{8}$$

čia σ_0 – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis, $\boldsymbol{Q}_\tau, \boldsymbol{Q}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'}$ – atitinkamų vektorių svorinės matricos.

Tačiau kovariacijų matricoms skaičiuoti formulės (7) ir (8) nėra tikslios, nes neįvertina senosios koordinačių sistemos identiškų taškų koordinačių klaidų įtakos transformavimo parametrų nustatymo procedūrose. Tikrąsias kovariacijų matricų $\boldsymbol{K}_\tau$ ir $\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'}$ išraiškas gausime taikydami formulę (6) su tiesiniu operatoriumi $\boldsymbol{N}^{-1}$. Taigi galime parašyti

$$\boldsymbol{K}_\tau = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{K}_\omega \boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\right)^{\boldsymbol{T}}. \tag{9}$$

Laisvųjų narių vektoriaus $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}'$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}}$ yra lygi

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}'} = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1} + \sigma_0^2 \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}, \tag{10}$$

nes vektoriai $\boldsymbol{T}$ ir $\boldsymbol{T}'$ nepriklausomi.

Toliau formulę (9) pertvarkome taip:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_\tau &= \sigma_0^2\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\right)\left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\right) = \\ &= \sigma_0^2\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1} + \boldsymbol{N}^{-1}\right) = \\ &= \sigma_0^2\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}^{-1} + \boldsymbol{N}^{-1}\right),\end{aligned} \tag{11}$$

čia $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{A}$.

Tuo atveju, kai naujosios ir senosios sistemų identiškų taškų koordinatės yra maždaug vienodo tikslumo, t. y. $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'} \approx \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}$, tada $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{N}$, ir formulę (11) galima išreikšti

$$\boldsymbol{K}_\tau = 2\sigma_0^2\boldsymbol{N}^{-1}. \tag{12}$$

Gauname išlygintųjų identiškų taškų koordinačių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ išraišką:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{T}}' &= \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{A}\tau + \boldsymbol{L} = \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\right)\boldsymbol{T} + \\ &+ \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{T}'.\end{aligned} \tag{13}$$

Išlygintojo koordinačių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'}$, atsižvelgiant į tai, kad naujosios ir senosios sistemų identiškų taškų koordinačių vektoriai yra nepriklausomi, atrodo taip:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'} &= \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\right)^{\boldsymbol{T}} + \\ &+ \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}'}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\right)^{\boldsymbol{T}}.\end{aligned}$$

Atlikę atitinkamus matematinius pertvarkymus gauname:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'} &= \sigma_0^2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} - \right. \\ &\left. - 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1}\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Tuo atveju, kai naujosios ir senosios sistemų identiškų taškų koordinačių tikslumas yra maždaug vienodas, t. y. $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}'} \approx \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}$, formulė (14) įgauna išraišką:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'} = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}. \quad (15)$$

Pastaroji formulė rodo, kad naujosios sistemos identiškų taškų išlygintųjų koordinačių kovariacijų matrica maždaug yra lygi senosios sistemos identiškų taškų kovariacijų matricai. Taigi naujosios sistemos identiškų taškų išlygintųjų koordinačių tikslumas negali būti didesnis už senosios sistemos identiškų taškų koordinačių tikslumą.

3. Transformuotų koordinačių tikslumo įvertinimas

Įvertinsime transformuotų iš senosios sistemos į naująją sistemą taškų erdvinių koordinačių vektoriaus $\boldsymbol{T}'$ tikslumą. Taikysime koordinačių transformavimo formulę (1), pertvarkytą į tokį pavidalą:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T}_0 + (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{M})\boldsymbol{T}, \quad (16)$$

čia $\boldsymbol{T}_0 = (x_0 y_0 z_0)^T$ – senosios koordinačių sistemos pradžios taško koordinačių vektorius naujojoje sistemoje (atitinkama vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ dalis). Matrica $\boldsymbol{M}$ formuojama iš transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ ir užrašoma taip:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & m & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & m \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Toks koordinačių transformavimo algoritmas yra patogesnis skaičiuojant kompiuteriais.

Naujosios sistemos transformuotų koordinačių vektoriaus $\boldsymbol{T}'$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}'}$ nustatoma iš formulės (16), atsižvelgiant į tai, kad vektoriai $\boldsymbol{T}_0$ ir $\boldsymbol{T}$ yra nepriklausomi:

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}'} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_0} + (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{M})\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{M})^T, \quad (18)$$

čia $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\sigma}_0^2 \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}^{-1}$.

Vektoriaus $\boldsymbol{T}_0$, kaip koordinačių transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ komponentės, kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_0}$ yra vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_\tau$ blokinė dalis. Vektorių $\boldsymbol{\tau}$ galima užrašyti blokiniu pavidalu:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

čia $\boldsymbol{T}_0 = (x_0 y_0 z_0)^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z m)^T$.

Taigi vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matrica įgauna tokią išraišką:

$$\boldsymbol{K}_\tau = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_0} & \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{T}_0} & \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_\tau$ skaičiuojama pagal formulę (11) arba (12), skaidant ją į keturis (20) pavidalo blokus.

Praktiniuose skaičiavimuose kovariacijų matricų įverčiai gaunami, kai formulėse standartiniai nuokrypiai σ_0 pakeičiami jų įverčiais m_0, t. y. $\sigma_0 \approx m_0$.

4. Išvados

1. Gautos formulės (11), (12) erdvinių koordinačių transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matricai $\boldsymbol{K}_\tau$ skaičiuoti. Nustatyta, kad naujosios sistemos identiškų taškų išlygintųjų koordinačių tikslumas negali būti didesnis už senosios sistemos identiškų taškų koordinačių tikslumą.

2. Formulė (18) rodo, kad transformuotosios į naująją sistemą erdvinės koordinatės yra mažiau tikslios už senosios sistemos koordinates. Transformuotų erdvinių koordinačių dispersijų reikšmių padidėjimas priklauso nuo apskaičiuotų transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matricos. Tiksliau apskaičiavus transformavimo parametrų reikšmes, naudojant daugiau identiškų taškų, gaunamos tikslesnės transformuotų erdvinių koordinačių reikšmės. Tačiau naujosios sistemos koordinatės visada bus mažiau tikslios už senosios sistemos koordinates.

Literatūra

1. Koch, K.-R. Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauss-Helmert und im Gauss-Markoff Modell. *Z. f. Vermessungswessen*, 2002, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 147–152.
2. Koch, K.-R. Einführung in die Bayes-Statistik. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 225 S.
3. Fischer, B.; Hegland, M. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression, Part 1. *Z. f. Vermessungs-wessen*, 1999, No 1. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 17–24.
4. Chitau, D. Über Koordinatentransformation in dreidimen-sionalen Systemen mit linearen Modellen. *Z. f. Vermessungswessen*, 1996, No 5. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 203–211.
5. Skeivalas, J.; Putrimas, R. Accuracy analysis of planimetric coordinate transformation (Planimetrinių koordinačių transformavimo tikslumo analizė). *Geodesy and Cartography* (*Geodezija ir kartografija*), No 1 (23). Vilnius: Technika, 1996, p. 92–95 (in Lithuanian).
6. Zakarevičius, A. Investigation of the recent geodynamic processes in the territory of the Lithuania (Dabartinių geodinaminių procesų Lietuvos teritorijoje tyrimas). Vilnius: Technika, 2003. 195 p. (in Lithuanian).

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil.

Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lithuania (Ph +370 5 2744703, Fax +370 5 2744705), e-mail: jonas.skeivalas@ap.vtu.lt.

Author of two monographs and more than 100 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.