ISSN 1392–1541 print
ISSN 1648–3502 online

Geodezija ir kartografija, 2006, XXXII t., Nr. 2
Geodesy and Cartography, 2006, Vol XXXII, No 2

UDK 528.14

TOPOCENTRINIŲ HORIZONTINIŲ KOORDINAČIŲ, TRANSFORMUOTŲ PAGAL GEOCENTRINES STAČIAKAMPES KOORDINATES, TIKSLUMAS

Jonas Skeivalas

*Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lietuva,
el. paštas: Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt*

Įteikta 2006 01 30, priimta 2006 03 20

Santrauka. Analizuojamas topocentrinių horizontinių koordinačių, nustatytų pagal geocentrines stačiakampes koordinates, taikant GPS metodą, tikslumas. Transformuotų topocentrinių horizontinių koordinačių tikslumas įvertinamas kovariacijų matrica, kuri sudaroma iš dviejų komponenčių. Viena komponentė rodo geodezinių koordinačių, antroji kovariacijų matricos komponentė – geocentrinių stačiakampių koordinačių klaidų įtaką topocentrinių koordinačių tikslumui. Reikiamam topocentrinių horizontinių koordinačių tikslumui gauti parenkamas atitinkamas geodezinių koordinačių tikslumas.

Prasminiai žodžiai: GPS, topocentrinės horizontinės ir geocentrinės stačiakampės koordinatės, kovariacijų matrica.

1. Įvadas

Koordinačių transformavimas iš vienos koordinačių sistemos į kitą yra pakankamai dažna geodezinė procedūra. Topocentrinė horizontinė koordinačių sistema taikoma kaip vietinė sistema įvairiuose projektuose GPS matavimams planuoti, statybose bei gali būti naudojama ir kaip valstybinė koordinačių sistema. Koordinates transformuojant iš vienos sistemos į kitą būtina įvertinti apskaičiuotų koordinačių tikslumą. Transformuotų koordinačių tikslumas priklauso ne tik nuo pradinės sistemos koordinačių tikslumo, bet ir nuo transformavimo operatoriaus koeficientų tikslumo [1–5]. Topocentrinėms horizontinėms koordinatėms transformuoti iš geocentrinės stačiakampės koordinačių sistemos taikomas operatorius, kurio koeficientai skaičiuojami pagal geodezines koordinates B ir L. Šių koordinačių tikslumas turi įtakos skaičiuojamųjų topocentrinių horizontinių koordinačių tikslumui. Straipsnyje analizuojama geodezinių koordinačių B ir L klaidų įtaka nustatomų topocentrinių koordinačių tikslumui. Pagal geocentrinių stačiakampių koordinačių kovariacijų matricą sudaryta topocentrinių horizontinių koordinačių kovariacijų matricos išraiška.

2. Geodezinių koordinačių B ir L klaidų įtakos analizė

Topocentrinėms horizontinėms koordinatėms (x', y', z') išreikšti geocentrinėmis stačiakampėmis koordinatėmis (X, Y, Z) taikoma formulė [6]

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{T}, \qquad (1)$$

čia $\boldsymbol{T}' = (x'y'z')^T$ – taško topocentrinių koordinačių vektorius, $\boldsymbol{T} = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$, $\Delta X = X - X_c$, $\Delta Y = Y - Y_c$, $\Delta Z = Z - Z_c$; X_c, Y_c, Z_c – topocentro geocentrinės stačiakampės koordinatės.

Transformavimo matrica $\boldsymbol{M}$ yra lygi:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -\sin B\cos L & -\sin B\sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

čia B, L – topocentro geodezinės koordinatės.

Geodezinių koordinačių B ir L klaidų įtakai topocentrinėms horizontinėms koordinatėms įvertinti reikėtų pagal geodezinių koordinačių B ir L statistinius parametrus nustatyti koordinačių vektoriaus $\boldsymbol{T}'$ kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{T'_{B'}}$ išraišką. Šiai išraiškai gauti pertvarkome formulę (1), parašydami matricą $\boldsymbol{M}$ blokinės matricos pavidalu:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1 \\ \boldsymbol{M}_2 \\ \boldsymbol{M}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{T}, \qquad (3)$$

čia $\boldsymbol{M}_i$ – matricos $\boldsymbol{M}$ i-oji eilutė, i = 1, 2, 3.

Toliau sudarome tokią išraišką:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T}_0^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{M}_0^{\boldsymbol{T}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{M}_2^{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{M}_3^{\boldsymbol{T}} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Vektoriaus $\boldsymbol{T}'$ kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{T'_B}$ šią lygybę galime parašyti blokiniu pavidalu

$$\boldsymbol{K}_{T'_B} = \boldsymbol{T}_0^T \boldsymbol{K}_{M_0^T} \boldsymbol{T}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}^T & & \\ & \boldsymbol{T}^T & \\ & & T^T \end{pmatrix} \times$$
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{M_1 M_2} & \boldsymbol{K}_{M_1 M_2} & \boldsymbol{K}_{M_1 M_3} \\ \boldsymbol{K}_{M_2 M_1} & \boldsymbol{K}_{M_2 M_2} & \boldsymbol{K}_{M_2 M_3} \\ \boldsymbol{K}_{M_3 M_1} & \boldsymbol{K}_{M_3 M_2} & \boldsymbol{K}_{M_3 M_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & & \\ & \boldsymbol{T} & \\ & & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

čia $\boldsymbol{K}_{M_i M_j} = \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{M}_i^T, \boldsymbol{M}_j^T\right)$ – kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{M_0^T}$ blokinė dalis, t. y. vektorių $\boldsymbol{M}_i^T$ ir $\boldsymbol{M}_j^T$ kovariacijų matrica.

Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{M_0^T}$ blokinės dalys $\boldsymbol{K}_{M_i M_j}$ yra trimatės, nes matricos $\boldsymbol{M}$ kiekviena eilutė $\boldsymbol{M}_i$ (3) susideda iš trijų komponenčių, t. y. $\boldsymbol{M}_i = \left(M_{i1} M_{i2} M_{i3}\right)$, $i = 1, 2, 3.$ Tada galime parašyti

$$\boldsymbol{K}_{M_i M_j} = \begin{pmatrix} K_{i1,j1} & K_{i1,j1} & K_{i1,j1} \\ K_{i1,j1} & K_{i1,j1} & K_{i1,j1} \\ K_{i1,j1} & K_{i1,j1} & K_{i1,j1} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

čia $i, j = 1, 2, 3.$

Nustatysime kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{T'_B}$ (5) blokinių dalių $\boldsymbol{K}_{M_i M_j}$ (6) išraiškas. Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{M_i M_j}$ komponentės, arba nariai, yra gaunami pagal atitinkamas matematinės statistikos formules. Taigi blokinės dalies $\boldsymbol{K}_{M_1 M_1}$ narius galime išreikšti:

$$\begin{aligned} & K_{11,11} = M\{\sin B \cos L - M(\sin B \cos L)\}^2 = \\ & M\{\sin B_0 \cos L_0 + \cos B_0 \cos L_0 \tau_B - \\ & \sin B_0 \sin L_0 \tau_L - \sin B_0 \cos L_0\}^2 = \\ & \cos^2 B_0 \cos^2 L_0 \sigma_B^2 + \sin^2 B_0 \sin^2 L_0 \sigma_L^2, \end{aligned} \quad (7)$$

čia M vidurkio, arba matematinės vilties, simbolis, $B_0 = M(B)$, $L_0 = M(L)$, $\tau_B = B - M(B)$, $\tau_L = L - M(L)$; σ_B, σ_L – standartiniai nuokrypiai.

Lygybėje (7) bei tolesnėse laikome, kad geodezinės koordinatės B ir L yra vienos nuo kitų bei nuo koordinačių X, Y, Z nepriklausomos.

Toliau gauname:

$$\left.\begin{aligned} & K_{11,12} = M\{[\sin B \cos L - M(\sin B \cos L)] \times \\ & [\sin B \sin L - M(\sin B \sin L)]\} = \\ & \frac{1}{2}\left(\cos^2 B_0 \sin 2L_0 \sigma_B^2 + \sin^2 B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2\right) \\ & K_{11,13} = \frac{1}{2} \sin 2B_0 \cos L_0 \sigma_B^2 \\ & K_{12,11} = K_{11,12} \\ & K_{12,12} = \cos B_0 \sin^2 L_0 \sigma_B^2 + \\ & \sin^2 B_0 \cos^2 B_0 \cos^2 L_0 \sigma_L^2 \\ & K_{12,13} = \frac{1}{2} \sin 2B_0 \sin L_0 \sigma_B^2 \\ & K_{13,11} = K_{11,13} \\ & K_{13,12} = K_{12,13} \\ & K_{13,13} = \sin^2 B_0 \sigma_B^2 \end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

Blokinės dalies $\boldsymbol{K}_{M_1 M_2}$ nariai –

$$\left.\begin{aligned} & K_{11,21} = -\frac{1}{2} \sin B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2 \\ & K_{11,22} = -\sin B_0 \sin^2 L_0 \sigma_L^2 \\ & K_{11,23} = 0 \\ & K_{12,21} = \sin B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2 \\ & K_{12,22} = \frac{1}{2} \sin B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2 \\ & K_{12,23} = 0 \\ & K_{13,21} = K_{13,22} = K_{13,23} = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

Blokinės dalies $\boldsymbol{K}_{M_1 M_3}$ nariai:

$$\left.\begin{aligned} & K_{11,31} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 L_0 \sin 2B_0 \sigma_B^2 - \sin 2B_0 \sin^2 L_0 \sigma_L^2\right) \\ & K_{11,32} = \frac{1}{4}\left(\sin 2B_0 \sin 2L_0 \sigma_B^2 + \sin 2B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2\right) \\ & K_{11,33} = -\cos^2 B_0 \cos L_0 \sigma_B^2 \\ & K_{12,31} = \frac{1}{4}\left(\sin 2B_0 \sin 2L_0 \sigma_B^2 + \sin 2B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2\right) \\ & K_{12,32} = \frac{1}{2}\left(\sin 2B_0 \sin^2 L_0 \sigma_B^2 - \sin 2B_0 \cos^2 L_0 \sigma_L^2\right) \\ & K_{12,33} = -\cos^2 B_0 \sin L_0 \sigma_B^2 \\ & K_{13,31} = \sin^2 B_0 \cos L_0 \sigma_B^2 \\ & K_{13,32} = \sin^2 B_0 \sin L_0 \sigma_B^2 \\ & K_{13,33} = -\frac{1}{2} \sin 2B_0 \sigma_B^2 \end{aligned}\right\}. \quad (10)$$

Blokinė dalis $\boldsymbol{K}_{M_2M_1} = \boldsymbol{K}_{M_1M_2}$. Toliau blokinę dalį $\boldsymbol{K}_{M_2M_2}$ galime rašyti:

$$\left.\begin{aligned} K_{21,21} &= \cos^2 L_0 \sigma_L^2 \\ K_{21,22} &= \frac{1}{2}\sin 2L_0 \sigma_L^2 \\ K_{21,23} &= 0 \\ K_{22,21} &= K_{21,22} \\ K_{22,22} &= \sin^2 L_0 \sigma_L^2 \\ K_{22,23} &= 0 \\ K_{23,21} &= K_{23,22} = K_{23,23} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Blokinės dalies $\boldsymbol{K}_{M_2M_3}$ nariai yra lygūs:

$$\left.\begin{aligned} K_{21,31} &= \frac{1}{2}\cos B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2 \\ K_{21,32} &= -\cos B_0 \cos^2 L_0 \sigma_L^2 \\ K_{21,33} &= 0 \\ K_{22,31} &= \cos B_0 \sin^2 L_0 \sigma_L^2 \\ K_{22,32} &= -\frac{1}{2}\cos B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2 \\ K_{22,33} &= 0 \\ K_{23,31} & \\ K_{23,32} &= K_{23,33} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Blokinės dalys $\boldsymbol{K}_{M_3M_1} = \boldsymbol{K}_{M_1M_3}$ ir $\boldsymbol{K}_{M_3M_2} = \boldsymbol{K}_{M_2M_3}$.

Blokinės dalies $\boldsymbol{K}_{M_3M_3}$ narius galime išreikšti:

$$\left.\begin{aligned} K_{31,31} &= \sin^2 B_0 \cos^2 L_0 \sigma_B^2 + \cos^2 B_0 \sin^2 L_0 \sigma_L^2 \\ K_{31,32} &= \frac{1}{2}\left(\sin^2 B_0 \sin 2L_0 \sigma_B^2 - \cos^2 B_0 \sin 2L_0 \sigma_L^2\right) \\ K_{31,33} &= -\frac{1}{2}\sin 2B_0 \cos L_0 \sigma_B^2 \\ K_{32,31} &= K_{31,32} \\ K_{32,32} &= \sin^2 B_0 \sin^2 L_0 \sigma_B^2 + \cos^2 B_0 \cos^2 L_0 \sigma_L^2 \\ K_{32,33} &= -\frac{1}{2}\sin 2B_0 \sin L_0 \sigma_B^2 \\ K_{33,31} &= K_{31,33} \\ K_{33,32} &= K_{32,33} \\ K_{33,33} &= \cos^2 B_0 \sigma_B^2 \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Tokiu būdu pagal gautas formules (7–13) apskaičiuojame geodezinių koordinačių (B, L) kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{M_0^T}$ blokines dalis $\boldsymbol{K}_{M_iM_j}$.

Pateiksime pavyzdį pavienio taško topocentrinių horizontinių koordinačių tikslumui įvertinti dėl geodezinių koordinačių klaidų įtakos, kai geodezinės koordinatės yra: $B = 55°0'0''$, $L = 24°0'0''$ ir $T = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T = (-323,\ -1481,\ -656)^T$ m, $\sigma_B = \sigma_L = 1''$. Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{M_0^T}$ blokinės dalys yra lygios:

$$\boldsymbol{K}_{M_1M_1} = \begin{pmatrix} 0{,}386 & 0{,}372 & 0{,}429 \\ 0{,}372 & 0{,}614 & 0{,}191 \\ 0{,}429 & 0{,}191 & 0{,}671 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{M_2M_2} = \begin{pmatrix} 0{,}834 & 0{,}372 & 0 \\ 0{,}372 & 0{,}165 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{M_3M_3} = \begin{pmatrix} 0{,}614 & 0{,}127 & -0{,}429 \\ 0{,}127 & 0{,}440 & -0{,}191 \\ -0{,}429 & -0{,}191 & 0{,}329 \end{pmatrix}.$$

Taikydami formulę (5) apskaičiuojame topocentrinių horizontinių koordinačių dispersijas:

$$\sigma_{X'_B}^2 = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}_{M_1M_1} \boldsymbol{T} = 1478550\sigma_B^2 \text{ ir } \sigma_{X'_B} = 6{,}1\,\text{mm},$$

$$\sigma_{Y'_B}^2 = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}_{M_2M_2} \boldsymbol{T} = 803944\sigma_B^2 \text{ ir } \sigma_{Y'_B} = 4{,}5\,\text{mm},$$

$$\sigma_{Z'_B}^2 = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}_{M_3M_3} \boldsymbol{T} = 1845094\sigma_B^2 \text{ ir } \sigma_{Z'_B} = 6{,}8\,\text{mm}.$$

3. Geocentrinių stačiakampių koordinačių (X, Y, Z) klaidų įtakos analizė

Topocentrinių horizontinių koordinačių (x', y', z') tikslumui įvertinti taikysime jų kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{T'_x}$ išraišką. Ji priklauso nuo geocentrinių stačiakampių koordinačių kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_T$. Remdamiesi formule (1) galime parašyti:

$$\boldsymbol{K}_{T'_x} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{M}^T, \tag{14}$$

čia $\boldsymbol{K}_T$ – vektoriaus $\boldsymbol{T}$ kovariacijų matrica.

Panaudodami anksčiau pateikto pavyzdžio duomenis, apskaičiuojame topocentrinių horizontinių koordinačių dispersijas. Jos priklauso nuo geocentrinių stačiakampių koordinačių tikslumo.

Gauname šiuos rezultatus:

$$\sigma_{X'_x}^2 = 0{,}56\sigma_X^2 + 0{,}11\sigma_Y^2 + 0{,}32\sigma_Z^2,$$

$$\sigma_{Y'_x}^2 = 0{,}17\sigma_X^2 + 0{,}83\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_{Z'_x}^2 = 0{,}27\sigma_X^2 + 0{,}17\sigma_Y^2 + 0{,}67\sigma_Z^2.$$

Pasirinkę standartinių nuokrypių reikšmes $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_Z = 5$ mm, apskaičiuojame: $\sigma_{X'_x} = 5$ mm, $\sigma_{Y'_x} = 5$ mm, $\sigma_{Z'_x} = 5{,}3$ mm.

Suminė topocentrinių horizontinių koordinačių kovariacijų matrica dėl geodezinių koordinačių (B, L) ir geocentrinių stačiakampių koordinačių (X, Y, Z) klaidų įtakos

$$\boldsymbol{K}_{T'} = \boldsymbol{K}_{T'_B} + \boldsymbol{K}_{T'_B} = \boldsymbol{T}_0^T \boldsymbol{K}_{M_0^T} \boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{M}\boldsymbol{K}_T \boldsymbol{M}^T. \qquad (15)$$

Suminės standartinių nuokrypių reikšmės yra: $\sigma_{X'} = 7{,}8$ mm, $\sigma_{Y'} = 6{,}7$ mm, $\sigma_{Z'} = 8{,}6$ mm.

4. Išvados

1. Topocentrinių horizontinių koordinačių kovariacijų matrica sudaryta iš dviejų komponenčių. Viena komponentė yra kovariacijų matrica dėl geodezinių koordinačių klaidų įtakos, o antroji – dėl geocentrinių stačiakampių koordinačių klaidų įtakos.
2. Geodezinių koordinačių (B, L) klaidų įtaka topocentrinių koordinačių tikslumui yra akivaizdžiai mažesnė nei geocentrinių stačiakampių koordinačių. Tai nustatyta atlikus praktinius skaičiavimus.

Literatūra

1. Koch, K. R. Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauss-Helmert und im Gauss-Markoff Modell. *Z. f. Vermessungswessen*, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 2002, S. 147–152.
2. Koch, K. R. Einführung in die Bayes-Statistik. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 225 S.
3. Fischer, B.; Hegland, M. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression, Part 1. *Z. f. Vermessungs-wessen*, No 1. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 1999, S. 17–24.
4. Chitau, D. Über Koordinatentransformation in dreidimen-sionalen Systemen mit linearen Modellen. *Z. f. Vermessungswessen*, No 5. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 1996, S. 203–211.
5. Skeivalas, J. Accuracy of 3D geodetic coordinates transformation algorithms. *Geodesy and Cartography* (*Geodezija ir kartografija*), Vol XXXI, No 2. Vilnius: Technika, 2005, p. 54–56 (in Lithuanian).
6. Mashimov, M. M. Theoretical geodesy. Moscow: Nedra, 1991. 272 p. (in Russian).

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lithuania
(Ph +370 5 274 4703, Fax +370 5 274 4705),
e-mail: jonas.skeivalas@ap.vtu.lt.

Author of 2 monographs and more than 130 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing the measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.