ISSN 1392–1541 print
ISSN 1648–3502 online

Geodezija ir kartografija, 2007, XXXIII t., Nr. 2
Geodesy and Cartography, 2007, Vol XXXIII, No 2

UDK 528.14

GEODEZINIO VERTIKALIOJO TINKLO IŠLYGINIMO MODELIS ELIMINUOJANT SISTEMINGĄSIAS KLAIDAS

Jonas Skeivalas

Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva,
el. paštas Jonas.Skeivalas@ap.vgtu.lt

Įteikta 2007 01 22, priimta 2007 03 30

Santrauka. Normalinių aukščių tikslumo nustatymas geodezinėje praktikoje yra pakankamai aktuali ir sudėtinga problema, susijusi su taikomais aukščių nustatymo metodais bei geofizinėmis konstantomis. Šiame straipsnyje analizuojamas papildomų parametrų ir sąlyginių lygčių taikymas vertikaliojo tinklo išlyginimo procedūrose, siekiant eliminuoti niveliavimo matavimų sistemingąsias klaidas. Tinklo išlyginimas atliekamas mažiausiųjų kvadratų metodu. Išlygintųjų dydžių ir parametrų tikslumas įvertinamas kovariacijų matricų pavidalu.

Reikšminiai žodžiai: vertikalusis tinklas, atsitiktinės ir sistemingosios klaidos, mažiausiųjų kvadratų metodas, kovariacijų matrica.

1. Įvadas

Vertikalieji tinklai sudaromi pagal aukščių matavimų duomenis, siekiant detaliai nustatyti Žemės paviršiaus formą. Tai būtina atliekant geoido nustatymo, geofizinius, geodinaminius tyrimus, kartografavimo darbus, jūros lygio matavimus bei kitiems poreikiams. Atliekant geodezinius matavimus taikoma tokia aukščių sistema, kurioje bet kurio taško aukštis, nustatytas niveliuojant, nepriklauso nuo niveliavimo kelio. Tokią nuostatą atitinka normalinių ir ortometrinių aukščių sistemos. Ortometriniams aukščiams skaičiuoti būtina žinoti Žemės plutos sandarą ir vidutinę realiojo sunkio g nustatomame taške reikšmę g_m linijos atkarpoje tarp geoido ir Žemės paviršiaus taško. Praktikoje tai įgyvendinti neįmanoma. Todėl sudarant valstybines aukščių sistemas taikoma normalinių aukščių sistema. Ši sistema pagrįsta rusų mokslininko M. S. Molodenskio sukurta teorija, pagal kurią normaliniams aukščiams skaičiuoti taikoma normalinio sunkio γ aukštyje $\overline{H} = 1/2H_A$ virš elipsoido reikšmė $\overline{\gamma}$. Normaliniam sunkiui γ reikiamu tikslumu nustatyti taikomi atitinkami metodai. Taigi normalinis aukštis nustatomas kaip normalės į elipsoidą atkarpa, atidėta tarp kvazigeoido ir Žemės paviršiaus taško. Tokiu būdu Žemės paviršiaus taško aukštis H_A šioje sistemoje nustatomas vienareikšmiškai.

Normalinių aukščių tikslumas geodezinėje praktikoje yra pakankamai aktuali ir sudėtinga problema, susijusi ir su taikomais aukščių nustatymo metodais, ir su geofizinėmis konstantomis. Šie matavimai atliekami remiantis IGSN 71 sunkio sistema [1, 5]. Taikoma LKS 94 koordinačių sistema bei GRS 80 normalusis sunkio laukas.

Aukščių matavimų rezultatuose visada esti klaidų – ir atsitiktinių, ir sistemingųjų [1–6]. Todėl būtini atitinkami matavimo rezultatų apdorojimo metodai, kuriuos taikant galima būtų efektyviau eliminuoti įvairias matavimų klaidas. Vienas iš metodų matavimų sistemingosioms klaidoms eliminuoti yra papildomų parametrų taikymas išlyginimo procedūrose [2, 6].

Šiame straipsnyje analizuojama papildomų parametrų taikymas siekiant eliminuoti sistemingąsias niveliavimo matavimų klaidas.

2. Išlyginimo teorinis modelis

Vertikaliuosiuose tinkluose matavimo rezultatams apdoroti racionaliausia taikyti mažiausiųjų kvadratų metodą ir papildomus parametrus. Šiuo metodu galima, naudojant atitinkamą programinę įrangą, automatiškai sudaryti kompiuterinę parametrinių lygčių sistemą. Aukščių tinklo eigų matavimo rezultatų kokybė kontroliuojama pagal aukščių dvigubųjų matavimų duomenų skirtumus bei pagal tų pačių aukščių nesutapimus poligonuose. Taikant papildomus parametrus aukščių tinklų apdorojimo procedūrose galima pasirinktinai kontroliuoti ir, remiantis nusistatytąja tikimybe, eliminuoti pavienių aukščių tinklo eigų sistemingąsias klaidas. Visų eigų to padaryti neįmanoma, nes turi būti paisoma nelygybės sąlygos, kad išmatuotų dydžių skaičius n būtų didesnis už bendrąjį parametrų skaičių $k+s$, t. y. $n > k+s$, čia k, s – atitinkamai pagrindinių ir papildomų parametrų skaičius.

Taikydami papildomus parametrus $\boldsymbol{\delta}$ kaip aukščių eigų sistemingąsias klaidas ir sąlygines pataisų lygtis, galime sudaryti šią pataisų ir sąlyginių lygčių sistemą:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{A}\tau + \boldsymbol{C}\delta + \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{A_r}\delta + \omega'' &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

čia $\boldsymbol{V}$ – pataisų vektorius $(n\times 1)$, τ – aukščių, kaip pagrindinių parametrų, pataisų vektorius $(k\times 1)$, δ – aukščių skirtumų pataisų vektorius $(n\times 1)$, $\boldsymbol{A}$ – pataisų lygčių koeficientų matrica $(n\times k)$, $\boldsymbol{C}$ – papildomų parametrų pataisų lygtyse koeficientų matrica $(n\times n)$, $\boldsymbol{A_r}$ – sąlyginių pataisų lygčių koeficientų matrica $(r\times n)$; $\boldsymbol{L}, \omega''$ – laisvųjų narių vektoriai, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{AH} - \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{H}$ – taškų aukščių apytikrių reikšmių vektorius, $\boldsymbol{h}$ – išmatuotų aukščių skirtumų vektorius. Vektoriuje δ nulinių elementų skaičius yra lygus $n-s$. Sąlyginių lygčių laisvųjų narių vektorius ω'' apskaičiuojamas pagal formulę

$$\omega'' = \boldsymbol{A_r B} + \boldsymbol{A_u H_u}, \tag{2}$$

čia $\boldsymbol{A_u}$ – pradinių duomenų koeficientų matrica $(r\times u)$, $\boldsymbol{H_u}$ – pradinių duomenų vektorius, r – sąlyginių lygčių skaičius, u – pradinių duomenų skaičius.

Sąlyginių lygčių formavimo procedūros gali būti įvairios priklausomai nuo aukščių tinklo sudėtingumo, aukščių skirtumų matavimų tikslumo ir kt.

Matavimų rezultatams apdoroti taikome mažiausiųjų kvadratų metodo sąlygą

$$\Phi = \boldsymbol{V^T PV} + 2\boldsymbol{k^T}\left(\boldsymbol{A_r} + \omega''\right) = \min. \tag{3}$$

Pagal (3) sąlygą gauname:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = 2\boldsymbol{A^T PV} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\delta} = 2\boldsymbol{C^T PV} + 2\boldsymbol{A_r^T k} = 0,$$

čia $\boldsymbol{P}$ – svorių matrica $(n\times n)$, $\boldsymbol{k}$ – koreliatų vektorius $(r\times 1)$.

Normalinių lygčių sistemos įgyja išraišką

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A^T PA}\tau + \boldsymbol{A^T PC}\delta + \boldsymbol{A^T PL} &= 0 \\ \boldsymbol{C^T PA}\tau + \boldsymbol{C^T PC}\delta + \boldsymbol{A_r^T k} + \boldsymbol{C^T PL} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Prie šios sistemos prijungiame sąlyginių pataisų lygčių sistemą iš bendrosios sistemos (1). Bendroji normalinių lygčių sistema išreikšta blokinėmis matricomis:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} & 0 \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} & \boldsymbol{A}_r^T \\ \hline 0 & \boldsymbol{A}_r & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \tau \\ \delta \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ \omega' \\ \omega'' \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

čia $\omega = \boldsymbol{A^T PL}$, $\omega' = \boldsymbol{C^T PL}$.

Pastaroji normalinių lygčių sistema kitokiu blokiniu pavidalu užrašoma:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}'_{11} & \boldsymbol{N}'_{12} \\ \boldsymbol{N}'_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau \\ \delta \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ \omega' \\ \omega'' \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

čia $\boldsymbol{N}'_{11} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}'_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{A_r^T} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}'_{21} = \left(0 \mid \boldsymbol{A}_r\right)$.

Lygčių sistemos (6) sprendinys

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} \tau \\ \delta \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}'_{11} & \boldsymbol{N}'_{12} \\ \boldsymbol{N}'_{21} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \omega \\ \omega' \\ \omega'' \end{pmatrix} = -\boldsymbol{Q}\omega_0, \tag{7}$$

čia $\boldsymbol{\omega}_0 = \left(\boldsymbol{\omega^T} \quad \boldsymbol{\omega'^T} \quad \boldsymbol{\omega''^T}\right)^{\boldsymbol{T}}$, $\tau_0 = \left(\tau^{\boldsymbol{T}}\,\delta^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{k^T}\right)^{\boldsymbol{T}}$.

Atvirkštinę blokinę matricą, taikydami K. R. Koch formulę, galime užrašyti šiuo pavidalu [2]:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}'_{11} & \boldsymbol{N}'_{12} \\ \boldsymbol{N}'_{21} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} \\ \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{N}'^{-1}_{11} + \boldsymbol{F'H'^{-1}F'^T} & -\boldsymbol{F'H'^{-1}} \\ \hline -\boldsymbol{H'^{-1}F'^T} & \boldsymbol{H'^{-1}} \end{array}\right), \tag{8}$$

čia $\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{N}'^{-1}_{11}\boldsymbol{N}'_{12}$, $\quad \boldsymbol{H'} = \boldsymbol{N}'_{22} - \boldsymbol{N}'_{21}\boldsymbol{N}'^{-1}_{11}\boldsymbol{N}'_{12} = \boldsymbol{N}'_{22.1} = -N'_{21}N'^{-1}_{11}N'_{12}$.

Vektorių τ, δ ir $\boldsymbol{k}$ tikslumas įvertinamas kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tau_0}$:

$$\boldsymbol{K}_{\tau_0} = \boldsymbol{QK}_{\omega_0}\boldsymbol{Q}. \tag{9}$$

Laisvųjų narių vektoriaus $\boldsymbol{\omega}_0$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\omega_0}$ yra lygi

$$\boldsymbol{K}_{\omega_0} = \boldsymbol{K}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A^T PL} \\ \boldsymbol{C^T PL} \\ \boldsymbol{A_r B} + \boldsymbol{A_u H_u} \end{pmatrix}\right\} = \boldsymbol{K}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A^T P}(\boldsymbol{AT} - \boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{C^T P}(\boldsymbol{AT} - \boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{A_r B} + \boldsymbol{A_u H_u} \end{pmatrix}\right\} = \boldsymbol{K}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A^T PAT} \\ \boldsymbol{C^T PAT} \\ \boldsymbol{A_u H_u} \end{pmatrix}\right\} + \boldsymbol{K}\left\{\begin{pmatrix} -\boldsymbol{A^T PB} \\ -\boldsymbol{C^T PB} \\ \boldsymbol{A_r B} \end{pmatrix}\right\}. \tag{10}$$

Šios lygybės pirmasis narys lygus nuliui, nes vektoriaus, kurio reikšmės yra pastovios, kovariacijų matrica lygi nuliui. Parametrų apytikrių reikšmių vektoriai $\boldsymbol{T}$ ir $\boldsymbol{H}_u$ išlyginimo procedūrose išlieka pastovūs, t. y. const. Taigi antrojo lygybės (10) nario kovariacijų matrica yra lygi

$$\boldsymbol{K}\left\{\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}\\ -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{A}_{r}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\right\}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}\\ -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{A}_{r}\end{pmatrix}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{B}}\left(-\boldsymbol{PA}\,|\,-\boldsymbol{PC}\,|\,\boldsymbol{A}_{r}^{T}\right). \qquad (11)$$

Kadangi $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{B}}=\sigma_{0}^{2}\boldsymbol{P}^{-1}$, nes matavimų rezultatai yra nepriklausomi, tai lygybė (10), atsižvelgiant į (11), užrašoma tokiu pavidalu:

$$\boldsymbol{K}_{\omega_{0}}=\sigma_{0}^{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{T}\\ \boldsymbol{C}^{T}\\ -\boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{P}^{-1}\end{pmatrix}\left(\boldsymbol{PA}\,|\,\boldsymbol{PC}\,|\,-\boldsymbol{A}_{r}^{T}\right)=$$

$$\sigma_{0}^{2}\left(\begin{array}{cc|c}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{PA} & \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{PA} & -\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}_{r}^{T}\\ \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{PA} & \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{PC} & -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{A}_{r}^{T}\\ \hline -\boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_{r}^{T}\end{array}\right)=$$

$$\sigma_{0}^{2}\left(\begin{array}{cc|c}\boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} & -\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}_{r}^{T}\\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} & -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{A}_{r}^{T}\\ \hline -\boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_{r}^{T}\end{array}\right), \qquad (12)$$

čia σ_{0} – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis.

Taikydami (8) formulę, parametrų pataisų vektorių $\boldsymbol{\tau}_{0}=\left(\boldsymbol{\tau}^{T}\boldsymbol{\delta}^{T}\boldsymbol{k}^{T}\right)^{T}$ galutiniu pavidalu nustatome iš (7) formulės.

Taikant papildomų parametrų pataisas $\boldsymbol{\delta}$ ir sąlygines lygtis sumažėja pagrindinių parametrų $\boldsymbol{\tau}$ tikslumas, nes tam tikra dalis matavimų procese gautos informacijos yra panaudojama papildomiems parametrams nustatyti. Aišku, dėl to nukenčia pagrindinių parametrų tikslumas. Tačiau taikant šias papildomas procedūras galima atlikti detalesnę geodezinių tinklų, šiuo atveju – aukščių tinklų, analizę.

Pateiksime kovariacijų matricų pokyčių rezultatus atvejais, kai netaikomi ir taikomi papildomi parametrai.

Iš lygčių sistemų (4) arba (5) matyti, kad pagrindinių parametrų taškų aukščių pataisų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tau}$, kai netaikomi papildomi parametrai $\boldsymbol{\delta}$ ir sąlyginės lygtys, yra šios išraiškos:

$$\boldsymbol{K}_{\tau}=\sigma_{0}^{2}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}. \qquad (13)$$

Vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}'_{\tau}$, taikant tik papildomus parametrus $\boldsymbol{\delta}$ be sąlyginių lygčių, yra lygi

$$\boldsymbol{K}'_{\tau}=\sigma_{0}^{2}\left(\boldsymbol{N}_{11}^{-1}+\boldsymbol{FH}^{-1}\boldsymbol{F}^{T}\right), \qquad (14)$$

čia $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{N}_{12}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{N}_{22}-\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{N}_{12}=\boldsymbol{N}_{22.1}$.

Taigi iš formulių (13) ir (14) matyti, kad taikant papildomus parametrus $\boldsymbol{\delta}$ pagrindinių parametrų $\boldsymbol{\tau}$ dispersijos padidėja dydžiu

$$\Delta\boldsymbol{K}'_{\tau,ii}=\sigma_{0}^{2}\left(\boldsymbol{FH}^{-1}\boldsymbol{F}^{T}\right)_{ii}. \qquad (15)$$

Nors taikant papildomus parametrus sumažėja nustatomų pagrindinių parametrų tikslumas, tačiau tokia procedūra padeda išsamiau atlikti geodezinių tinklų analizę, vertinti galimų klaidų šaltinius.

3. Išvados

1. Vertikaliųjų tinklų išlyginimo procedūrose taikant papildomus parametrus ir sąlygines lygtis yra galimybė analizuoti matavimų sistemingąsias klaidas. Tokiai analizei atlikti panaudojama tam tikra dalis matavimų informacijos, todėl dėl šios operacijos sumažėja pagrindinių parametrų tikslumas.
2. Straipsnyje pateikiamos kovariacijų matricų išraiškos, pagal kurias galima įvertinti pagrindinių bei papildomų parametrų tikslumo rodiklių pokyčius, kai vertikalusis tinklas išlygintas taikant papildomus parametrus ir sąlygines lygtis.

Literatūra

1. MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Geodesique, the Geodesists Handbook*. International Union of Geodesy and Geophysics, 1988, p. 348–358.
2. KOCH, K. R. *Einführung in die Bayes-Statistik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. 225 S.
3. ЯКОВЛЕВ, Н. В. *Высшая геодезия*. Москва: Недра, 1989. 446 с.
4. ADAM, J.; AUGATH, F.; BROUWER, A. A. Status and Development of the European Height Systems. *LAG Symposia*, 2000, Vol 121, Geodesy Begon. Springer: Berlin Heidelberg, p. 55–60.
5. PETROŠKEVIČIUS, P. Sunkio anomalijų ir pagreičio redukavimas. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, 2000, Vol XXVI, No 4, p. 167–170 (in Lithuanian).
6. SKEIVALAS, J. *Treatment of correlated geodetic measurements* (Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų matematinis apdorojimas). Vilnius: Technika, 1995. 272 p. (in Lithuanian).

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705,
e-mail: *jonas.skeivalas@ap.vgtu.lt.*

Author of two monographs and more than 130 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.