



GREIČIO MATAVIMŲ DOPLERIO MATUOKLIAIS TIKSLUMO ANALIZĖ

Jonas Skeivalas

*Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva
El. paštas Jonas.Skeivalas@vgtu.lt*

Santrauka. Straipsnyje pristatoma judančių objektų greičio matavimo prietaisų, pagrįstų fizikiniu Doplerio efektu, tikslumo analizė. Taikyta atsitiktinių klaidų tikimybinis modelis. Nagrinėjamas greičio matuoklių tikslumas priklausomai nuo lazerio ar radijo dažnių spinduliavimo stabilumo ir tikslumo bei nuo spinduliavimo greičio atmosferoje nustatymo patikimumo. Doplerio matuoklių tikslumui taip pat įtakos turi skirtuminio (mūšos) dažnio matavimų klaidos. Įrodoma, kad nedideliu greičiu judančių objektų (pvz., automobilių, laivų lėktuvų) radialinis greitis nustatomas žymiai didesniu tikslumu nei dideliu greičiu judančių objektų (pvz., dirbtinių Žemės palydovų, asteroidų).

Reikšminiai žodžiai: Dopleris, GPS, kovariacija, virpesių lūžio rodiklis.

1. Įvadas

Analizuojamas elektroninių Doplerio matuoklių, pagrįstų fizikiniu reiškiniu – Doplerio efektu, naudojamų judančių objektų greičiui matuoti, tikslumas. Tokių prietaisų, kaip ir bet kurių kitų elektroninių ar mechaninių prietaisų, matavimų rezultatai neišvengiamai turi klaidų. Klaidų analizei taikysime tikimybinį modelį, laikydami, kad veikia tik atsitiktinės klaidos. Sistemingsioms klaidoms analizuoti paprastai taikomi algebriniai metodai, išreiškiant sistemingąją klaidą kaip tam tikrų kintamųjų funkciją. Tam tikslui atliekami specialūs matavimai, – matavimų rezultatai palyginami su žinomomis dydžių vertėmis ar matuotomis didesnio tikslumo prietaisais. Gali būti taikomas ir tikimybinis randomizavimo metodas.

Matavimų Doplerio matuokliais tikslumas priklauso pagrindinai nuo dviejų rūšių parametrų – lazerio ar radijo spinduliavimo dažnių stabilizavimo ir matavimo bei spinduliavimo greičio atmosferoje nustatymo klaidų. Tai matavimų metodo klaidos. Kitos klaidos atsiranda dėl skirtuminio (mūšos) dažnio tiesioginių arba netiesioginių matavimų.

Doplerio matuoklis gali veikti vienoje sistemoje su impulsiniu-faziniu tolimačiu, kuriuo galima nustatyti atstumą iki judančio objekto. Tokios kompleksinės sistemos matavimų tikslumas yra didesnis (Hofmann-Welshof *et al.* 2001; Skeivalas 2008).

2. Matavimų metodo modelis ir jo tikslumas

Elektromagnetinės spinduliuotės siųstuvui ir imtuvui judant vienas kito atžvilgiu, Doplerio dažnis f_d nustatomas iš formulės (Bauer 1994; Leick 1995; Skeivalas 2004)

$$f_d = f_0 \left(1 \pm \frac{v_r}{v} + \frac{v_r^2}{2v^2} \pm \dots \right), \quad (1)$$

čia f_0 – siunčiamos spinduliuotės dažnis, f_d – priimtos Doplerio spinduliuotės dažnis, v_r – radialinis greitis arba siųstuvo ir imtuvo tarpusavio greičių skirtumas, v – spinduliuotės greitis atmosferoje. Viršutiniai ženklai atitinka atstumo tarp siųstuvo ir imtuvo mažėjimą.

Atitinkamų dydžių tikslumo parametrų išraiškas nustatysime iš eilutės (1), neatsižvelgdami į 2-ojo ir aukštesnio laipsnio narius, nes jų įtaka yra nykstamai maža. Tuo atveju, kai nustatant judančio objekto greitį elektromagnetinė spinduliuotė atsispindi nuo judančio objekto ir grįžta atgal į imtuvą, formulė (1) rašoma

$$f_d = f_0 \left(1 \pm \frac{2v_r}{v} \right). \quad (2)$$

Iš šios formulės išreiškiame radialinį greitį v_r (kai atstumas mažėja):

$$v_r = \frac{\Delta f}{2f_0} v, \quad (3)$$

čia $\Delta f = f_d - f_0 = \frac{2v_r}{v} f_0$ – skirtuminis (mūšos) dažnis.

Radialinio greičio v_r standartiniam nuokrypiui σ_{v_r} skaičiuoti formulė gaunama iš lygybės (3):

$$\sigma_{v_r}^2 = \left(\frac{\partial v_r}{\partial \Delta f} \right)_0^2 \sigma_{\Delta f}^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial f_0} \right)_0^2 \sigma_{f_0}^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial v} \right)_0^2 \sigma_v^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial \Delta f} \right)_0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial f_0} \right)_0 \cdot K(\Delta f, f_0),$$

arba

$$\sigma_{v_r}^2 = \frac{v^2}{4f_0^2} \sigma_{\Delta f}^2 + \frac{v^2 \cdot \Delta f^2}{4f_0^4} \sigma_{f_0}^2 + \frac{\Delta f^2}{4f_0^2} \sigma_v^2 - \frac{v v_r \Delta f}{f_0^2} \sigma_{f_0}^2, \quad (4)$$

čia $\sigma_{\Delta f}$, σ_{f_0} , σ_v – atitinkami skirtuminio dažnio, siunčiamos spinduliuotės dažnio ir spinduliuotės greičio atmosferoje standartiniai nuokrypiai. Šioje formulėje dydžių Δf ir f_0 kovariacija nustatyta pagal išraišką (Skeivalas 2007)

$$K(\Delta f, f_0) = M \{ \delta(\Delta f) \cdot \delta f_0 \} = M \left\{ \frac{2v_r}{v} \delta f_0 \cdot \delta f_0 \right\} = \frac{2v_r}{v} \sigma_{f_0}^2, \quad (5)$$

čia $K(\Delta f, f_0)$ – dydžių Δf ir f_0 kovariacija; M – vidurkio (matematinės vilties) simbolis; $\delta(\Delta f)$, δf_0 – atitinkamų dydžių atsitiktinės klaidos. Spinduliuotės dažnis f_0 , taikant kvarcinius generatorius, yra žinomas su vidutine santykinė klaida $\sigma_{f_0}/f_0 = 10^{-8}$, taigi kai $f_0 = 1 \text{ GHz}$, gauname standartinį nuokrypį $\sigma_{f_0} = 10 \text{ Hz}$.

Kovariacijos reikšmė, kai $v_r = 30 \text{ m/s}$, yra lygi $K(\Delta f, f_0) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}^2$, taigi nedidelė.

Skirtuminio dažnio Δf standartinio nuokrypio $\sigma_{\Delta f}$ išraiška:

$$\sigma_{\Delta f}^2 = \sigma_{\Delta f}'^2 + \sigma_{\Delta f}''^2, \quad (6)$$

čia $\sigma_{\Delta f}'$ – matavimų metodo standartinis nuokrypis, $\sigma_{\Delta f}''$ – tiesioginio matavimo standartinis nuokrypis.

Dydis $\sigma_{\Delta f}'$ išreiškiamas lygybe

$$\sigma_{\Delta f}'^2 = \sigma_{f_d}^2 + \sigma_{f_0}^2 - 2K(f_d, f_0). \quad (7)$$

Taikydami formulę (2) rašome:

$$\sigma_{f_d} = \left(1 + \frac{2v_r}{v} \right) \sigma_{f_0}, \quad (8)$$

ir toliau –

$$K(f_d, f_0) = M \left\{ \left(1 + \frac{2v_r}{v} \right) \delta f_0 \cdot \delta f_0 \right\} = \left(1 + \frac{2v_r}{v} \right) \sigma_{f_0}^2. \quad (9)$$

Taigi iš formulės (7) nustatome

$$\sigma_{\Delta f}' = \frac{2v_r}{v} \sigma_{f_0}, \quad (10)$$

ir kai $v_r = 30 \text{ m/s}$, $\sigma_{f_0} = 10 \text{ Hz}$, turime $\sigma_{\Delta f}' \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}$.

Pagal formulę (6), taikydami išraišką (10), galime parašyti

$$\sigma_{\Delta f}^2 = \frac{4v_r^2}{v^2} \sigma_{f_0}^2 + 4 \cdot 10^{-12} \approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ Hz}^2 \quad (11)$$

ir $\sigma_{\Delta f} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}$.

Skirtuminis (mūšos) dažnis Δf išmatuojamas dažnimačiu, kurio vidutinį santykinį tikslumą laikysime $\sigma_{\Delta f}''/\Delta f = 10^{-8}$. Skirtuminio dažnio Δf reikšmė, kai radijo spinduliuotės f_0 dažnis Doplerio greičio matuokliuose apie $f_0 = 1 \text{ GHz}$, o $v_r = 30 \text{ m/s}$, yra lygi

$$\Delta f = 2f_0 \frac{v_r}{v} \approx 200 \text{ Hz}.$$

Tada skirtuminio dažnio Δf matavimo standartinis nuokrypis

$$\sigma_{\Delta f}'' = \Delta f \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}.$$

Nagrinėsime atmosferos parametrų įtaką elektromagnetinių virpesių greičiui v ir radialiniam greičiui v_r .

Elektromagnetinių virpesių greitis atmosferoje lygus

$$v = \frac{c}{n},$$

čia $c = 299\,792\,458 \text{ km/s}$ – virpesių greitis vakuume, n – virpesių lūžio atmosferoje rodiklis. Kad būtų patogiau skaičiuoti, lūžio rodiklis n išreiškiamas lūžio indeksu N :

$$n = 1 + 10^{-6} N. \quad (12)$$

Virpesių greičio v atmosferoje standartinis nuokrypis σ_v turi tokią išraišką:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n^2} \sigma_c^2 + \left(\frac{c}{n^2} \right)^2 \sigma_n^2 = 0,3^2 + 10^5 \sigma_N^2, \quad (13)$$

nes vidutiniškai $n \approx 1,000\,300$, $\sigma_c = 0,3 \text{ m/s}$, σ_N – virpesių lūžio atmosferoje indekso standartinis nuokrypis.

Radijo bangų lūžio indeksas N ir rodiklis n yra atmosferos parametrų – temperatūros T , slėgio P , drėgmės e funkcija – $N = N(T, P, e)$. Toliau galima rašyti:

$$\sigma_N^2 = \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_0^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_0^2 \sigma_P^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial e} \right)_0^2 \sigma_e^2. \quad (14)$$

Radijo bangų lūžio indekso dalinių išvestinių reikšmės esant vidutinėms meteorologinėms sąlygoms ($T = 288 \text{ K}$, $P = 745 \text{ mmHg}$, $e = 12 \text{ mmHg}$) yra lygios:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_0 = -1,4 \text{ N 1/K},$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_0 = 0,4 \text{ N 1/mmHg},$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial e} \right)_0 = 5,9 \text{ N 1/mmHg}.$$

Taigi didžiausią įtaką radijo bangų sklidimui turi oro drėgmė ir temperatūra.

Lūžio indekso N priklausomybė nuo atmosferos parametrų išreiškiama Froome ir Essen formule (Skeivalas 2004; Дымнов 2008; Вшивкова 2005)

$$N = a \frac{P}{T} + b \frac{e}{T} + c \frac{e}{T^2}, \quad (15)$$

čia a, b, c – dispersijos koeficientai, kurių empirinės reikšmės pateiktos lentelėje; P – atmosferos slėgis, mmHg arba mbar, T – atmosferos temperatūra K, e – atmosferos drėgnumas, mmHg arba mbar. Atmosferos parametrų reikšmės nustatomos matavimo taške vidutiniu tikslumu: $\sigma_p \approx 0,1$ mmHg, $\sigma_T \approx 0,1$ K, $\sigma_e \approx 0,01$ mmHg.

Dispersijos koeficientų reikšmės

Koeficientai	P ir e , mmHg	P ir e , mbar
a	103,49	77,64
b	-17,23	-12,92
c	$4,96 \cdot 10^5$	$3,72 \cdot 10^5$

Nustatysime virpesių lūžio indekso N ir rodiklio n dispersijų išraiškas priklausomai nuo atmosferos parametrų dispersijų. Pagal lygybę (15)

$$\sigma_N^2 = \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_0^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_0^2 \sigma_P^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial e} \right)_0^2 \sigma_e^2.$$

Toliau gauname

$$\sigma_N^2 = \left(\frac{aP}{T^2} + \frac{be}{T^2} + \frac{2ce}{T^3} \right)^2 \sigma_T^2 + \frac{a^2}{T^2} \sigma_P^2 + \left(\frac{b}{T} + \frac{c}{T^2} \right)^2 \sigma_e^2. \quad (16)$$

Panaudodami vidutines atmosferos parametrų reikšmes pagal formulę (16) apskaičiuojame $\sigma_N = 0,16$.

Pagal formulę (12) $\sigma_n = 10^{-6} \sigma_N = 0,16 \cdot 10^{-6}$. Atmosferos temperatūrą matuodami $\sigma_T \approx 0,01$ K tikslumu, gautume $\sigma_n = 10^{-6} \cdot 0,016$.

Radio spinduliavimo greičio v atmosferoje tikslumas, taikant formulę (13) ir $\sigma_N = 0,16$, įvertinamas standartiniu nuokrypiu $\sigma_N = 50$ m/s.

Pagal formulę (4) atlikę skaičiavimus gauname

$$\begin{aligned} \sigma_{v_r}^2 &= 2 \cdot 10^{-13} + 10^{-13} + 2,5 \cdot 10^{-13} - \\ &2 \cdot 10^{-13} \approx 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ \text{ir } \sigma_{v_r} &\approx 0,6 \cdot 10^6 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Gautasis rezultatas nustatytas judančio objekto (pvz. automobilio, lėktuvo, laivo ar raketos), kurio radialinis greitis $v_r = 30$ m/s, Doplerio imtuvo generatoriaus virpesių dažnis 1 GHz.

3. GPS palydovų radialinio greičio nustatymas

Aptarsime nagrinėjamo metodo taikymą GPS palydovų radialiniam greičiui v_r nustatyti ir tikslumui įvertinti pagal GPS imtuvais priimamą nešlio virpesių spinduliuotę. Kadangi radio spinduliai sklinda viena kryptimi, iš GPS palydovo į GPS imtuvą, tai Doplerio dažnis f_d nustatomas pagal formulę

$$f_d = f_0 \left(1 \pm \frac{v_r}{v} \right). \quad (17)$$

GPS palydovo radialinio greičio, nustatyto taikant Doplerio efektą, tikslumas įvertinamas taip:

$$\begin{aligned} \sigma_{v_r}^2 &= \frac{v^2}{f_0^2} \sigma_{\Delta f}^2 + \frac{v^2 \Delta f^2}{f_0^4} \sigma_{f_0}^2 + \frac{\Delta f^2}{f_0^2} \sigma_v^2 - \\ &\frac{2v \cdot \Delta f \cdot v_r}{f_0^3} \sigma_{f_0}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Skirtuminio (mūšos) dažnio Δf matavimų metodo standartinis nuokrypis $\sigma'_{\Delta f}$ nustatomas taikant formules (7) ir (17)

$$\sigma'_{\Delta f} = \frac{v_r}{v} \sigma_{f_0} = 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}, \quad (19)$$

čia panaudota $v_r = 0,9$ km/s – maksimalus GPS palydovų radialinis greitis, $\sigma_{f_0} = 10^{-12} \cdot 1,5 \text{ GHz} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ (dėl L_1 nešlio kanalo dažnio $f_1 \approx 1,5 \text{ GHz}$).

Skirtuminis (mūšos) dažnis Δf vidutiniškai yra lygus

$$\Delta f = \frac{v_r}{v} f_0 = 4,5 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 4,5 \text{ kHz}. \quad (20)$$

GPS palydovų rubidžio ir cezio virpesių generatorių santykinis dažnių stabilumas $\sigma_{f_0}/f_0 = 10^{-12}$. GPS imtuvai signalų priėmimo momentu (epocha) sinchronizuoja savųjų virpesių generatorių dažnį su priimamų virpesių dažniu (Голубев, Дымнов 2008).

Skirtuminio dažnio Δf tiesioginio matavimo GPS imtuvuose tikslumas, turint mintyje standartinį nuokrypį $\sigma_{\Delta f}$, rašomas

$$\sigma_{\Delta f}'' = \sigma_{f_0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}.$$

Taigi skirtuminio dažnio Δf standartinis nuokrypis $\sigma_{\Delta f}$ nustatomas

$$\sigma_{\Delta f}^2 = \sigma_{\Delta f}'^2 + \sigma_{\Delta f}''^2 \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}^2$$

$$\text{ir } \sigma_{\Delta f} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}.$$

Pagal formulę (18) apskaičiuojame GPS palydovo radialinio greičio nustatymo standartinį nuokrypį σ_{v_r} , naudodami žinomas parametrų reikšmes:

$$\begin{aligned} \sigma_{v_r}^2 &= 2,2 \cdot 10^{-7} + 10^{-17} + 2,5 \cdot 10^{-8} - \\ &2,2 \cdot 10^{-18} \approx 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

$$\text{ir } \sigma_{v_r} \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}.$$

Taigi matyti, kad GPS palydovo radialinio greičio nustatymo tikslumą pagrindinai lemia skirtuminio (mūšos) dažnio Δf bei radio spinduliavimo greičio v atmosferoje nustatymo klaidos.

4. Išvados

1. Doplerio efektą pagrįstų matuoklių judančių objektų greičiui matuoti tikslumas priklauso nuo matavimo metodo ir parametrų tiesioginių matavimų klaidų (radio ar lazerio spinduliavimo dažnių tikslumo, skirtuminio (mūšos) dažnio matavimo klaidų, atmosferos įtakos virpesių sklaidimo greičiui klaidų).

2. Nedideliu greičiu judančių objektų (pvz., automobilių, lėktuvų ar laivų) radialinis greitis nustatomas žymiai didesniu tikslumu (standartinis nuokrypis keliomis eilėmis yra mažesnis) nei dideliu greičiu judančių objektų (pvz., dirbtinių Žemės palydovų, asteroidų).
3. Siūlomą Doplerio prietaisais nustatomo objektų greičio tikslumo įvertinimo metodą galima taikyti Doplerio greičio matuokliams kalibruoti.

Literatūra

- Bauer, M. 1994. *Vermessung und Ortung mit Satelliten*. Heidelberg: Wichmann. 274 S.
- Hofmann-Wellenhopf, B.; Lichtenegger, H. and Collins, J. 2001. *Global Positioning System. Theory and Practice*. Wien, New York: Springer-Verlag. 326 p.
- Leick, A. 1995. *GPS Satellite Surveying*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons. 352 p.
- Skeivalas, J. 2004. *Elektroniniai geodeziniai prietaisai*. Vilnius: Technika. 193 p.
- Skeivalas, J. 2007. Koreliacinė analizė jonosferos įtakai GPS matavimams nustatyti [Practice of correlation analysis for determination of ionospheric influence on GPS measurements], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 33(4): 98–101.
- Skeivalas, J. 2008. *GPS tinklų teorija ir praktika* [Theory and practice of GPS networks]. Vilnius: Technika. 288 p.
- Вшивкова, О. В. 2005. О комплексном подходе к решению рефракционной проблемы, *Геодезия и аэрофотосъемка* 4: 41–46.
- Голубев, А. Н.; Дымнов, Д. Г. 2008. О возможности аппаратного определения тропосферной поправки без привлечения моделей при спутниковых измерениях, *Геодезия и аэрофотосъемка* 1: 3–7.
- Дымнов, Д. Г. 2008. О высотном разnose приемников при дифференциальном режиме работы глобальных спутниковых систем, *Геодезия и аэрофотосъемка* 3: 63–68.

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: jonas.skeivalas@vgtu.lt.

Author of three monographs and more than 150 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks, global positioning system (GPS).