GEODEZIJA IR KARTOGRAFIJA / GEODESY AND CARTOGRAPHY
2010
36(4): 160–163

UDK 528.23 doi: 10.3846/gc.2010.26

GEODEZINIŲ KOORDINAČIŲ PERSKAIČIAVIMO TECHNOLOGIJOS, TAIKANT h-GEOMETRIJOS FUNKCIJAS

Donaldas Zanevičius[1], Faustas Keršys[2]

Kosminių technologijų studijų centras,
Šermukšnių g. 3, LT-35113 Panevėžys, Lietuva
El. paštas: [1]dzanevicius@yahoo.com; [2]faustas@baltgina.lt

Įteikta 2010 06 30; priimta 2010 09 24

Santrauka. Straipsnyje siūloma koordinačių perskaičiavimo matematiniuose modeliuose taikyti ne klasikinės geometrijos funkcijas sin ir cos, o h-geometrijos funkcijas sph ir cph (Zanevičius 2008, 2010). Kaip žinoma, funkcijų sin ir cos skaitinės reikšmės gali būti apskaičiuotos tik išskleidus funkcijas begaline eilute. h-geometrijos funkcijos sph ir cph turi algebrines analitines išraiškas. Tai leidžia supaprastinti skaičiavimo technologijas (paspartinti kompiuterinį skaičiavimą) ir gauti tuos pačius skaičiavimo rezultatus.

Reikšminiai žodžiai: geodezinės koordinatės, koordinačių perskaičiavimas, geodezinė platuma, geodezinė ilguma, elipsoidinis aukštis, geodezinės stačiakampės koordinatės.

1. Įvadas

Kosminės navigacijos uždaviniuose pereinant nuo vienos koordinačių sistemos prie kitos dažnai tenka perskaičiuoti koordinačių dydžius. Tipiški uždaviniai:

1. Perskaičiuoti turimas geodezines koordinates B, L, H į geocentrines stačiakampes koordinates X, Y, Z.
2. Perskaičiuoti turimas geocentrines stačiakampes koordinates X, Y, Z į geodezines koordinates B, L, H.

Priminsime, kaip tai daroma dabar, kai matematinio modelio pagrindas yra klasikinės geometrijos funkcijos sin ir cos.

1 *uždavinys*

Matematiniai modeliai, taikant klasikinės geometrijos funkcijas sin ir cos, yra gerai žinomi (Skeivalas 2004):

$$X = (N + H)\cdot\cos(B)\cdot\cos(L), \tag{1}$$

$$Y = (N + H)\cdot\cos(B)\cdot\sin(L), \tag{2}$$

$$Z = \left[\left(1 - e^2\right)\cdot N + H\right]\cdot\sin(B). \tag{3}$$

Kampai B, kaip ir kampai L, H, duodami laipsniais (Bo), minutėmis (Bm) ir sekundėmis (Bs), todėl iš pradžių kampų dydžius reikia išreikšti laipsniais ir jų dešimtainėmis dalimis:

$$Boms = (Bo\cdot 60 + Bm)\cdot 60 + Bs, \tag{4}$$

$$Bod = \frac{Boms}{3600}. \tag{5}$$

Tada kampo dydį reikia perskaičiuoti radianais:

$$B = \frac{\pi}{180}\cdot Bod. \tag{6}$$

Žinome, funkcijos sin ir cos neturi analitinių išraiškų ir gali būti apskaičiuotos tik išskleistos begalinėmis eilutėmis:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{7}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{8}$$

Formulėse (1–3) N reikšmė nustatoma taip:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cdot(\sin(B))^2}}, \tag{9}$$

čia

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \tag{10}$$

a, b ir H skaitinės reikšmės yra duodamos.

Imkime pavyzdį. Duota:

$a = 6\,378\,137,$

$b = 6\,356\,752,$

$H = 92,477,$

$B = 55°\cdot 19'\cdot 6{,}735\,61'',$

$L = 21°\cdot 49'\cdot 56{,}293\,20'',$

arba radianais:

$B = 0{,}965\,490\,62,$

$L = 0{,}381\,045\,58.$

Taikydami formules (1–10) gausime (skaičiuota programa *Mathcad*):

$$X = 3{,}376\,643\,447\times 10^6, \quad (11)$$

$$Y = 1{,}352\,769\,851\times 10^6, \quad (12)$$

$$Z = 5{,}221\,718\,353\times 10^6. \quad (13)$$

2 uždavinys

Matematinis modelis elipsoidinėms koordinatėms skaičiuoti (Skeivalas 2004; Zanevičius 2008, 2010):

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H)\cdot\cos(B), \quad (14)$$

$$H = \frac{p}{\cos(B)} - N, \quad (15)$$

$$Z = [(1 - e^2)\cdot N + H]\cdot\sin(B), \quad (16)$$

$$\tan(B) = \frac{Z}{p}\cdot\left(1 - e^2\cdot\frac{N}{N + H}\right)^{-1}, \quad (17)$$

$$\tan(L) = \frac{Y}{X}\cdot \quad (18)$$

Norint apskaičiuoti elipsoidinį aukštį H(15) reikia žinoti geodezinę platumą B ir, atvirkščiai, skaičiuojant geodezinę platumą B(17) reikia žinoti elipsoidinį aukštį H.

Šiems skaičiavimams taikomas iteracinis metodas.

Iš pradžių skaičiuojama apytikslė geodezinės platumos reikšmė Bo:

$$Bo = \mathrm{arctg}\left[\frac{Z}{p}\cdot\left(1 - e^2\right)^{-1}\right]. \quad (19)$$

Funkcija arctg taip pat gali būti apskaičiuota tik išskleista begaline eilute

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{x^{2\cdot n+1}}{2\cdot n + 1}\right],$$

$$|x| < 1, \quad (20)$$

arba

$$\mathrm{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2\cdot n + 1)\cdot x^{2\cdot n+1}}\right],$$

$$|x| > 1. \quad (21)$$

Toliau gaunama No reikšmė:

$$No = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cdot(\sin(Bo))^2}} \quad (22)$$

ir elipsoidinis aukštis

$$Ho = \frac{p}{\cos(Bo)} - No. \quad (23)$$

Tolesnėje iteracijoje tikslinama geodezinės platumos reikšmė:

$$B = \mathrm{arctg}\left[\frac{Z}{p}\cdot\left(1 - e^2\cdot\frac{No}{No + Ho}\right)^{-1}\right], \quad (24)$$

nustatomos naujos N ir H reikšmės.

Iteracijose skaičiavimai tęsiami tol, kol paskutinių iteracijų rezultatai atitinka reikiamą tikslumą.

2. h-geometrija

Palydovinės navigacijos uždavinius tikslinga spręsti taikant h-geometrijos funkcijas sph ir cph, nes supaprastėja skaičiavimo technologijos, o skaičiavimo rezultatai gaunami tie patys.

Palydovinės navigacijos kompiuterinių programų visuma sudaro didžiulę skaičiavimo technologinių problemų sistemą. Kaip ir kituose kosminės mechanikos uždaviniuose, itin aktuali kompiuterinio skaičiavimo trukmės mažinimo problema. Skaičiavimų pagrindą sudaro sferinės trigonometrijos matematiniai modeliai, kuriuose pagrindinės funkcijos yra sin ir cos. Kaip žinome, šios funkcijos neturi analitinių išraiškų ir gali būti apskaičiuotos tik išskleistos begalinėmis eilutėmis (7), (8).

Knygose (Zanevičius 2008, 2010) pateikta h-geometrijos idėja ir neosinusų (sph ir cph) apibrėžimas, daug praktinių uždavinių sprendimų taikant sph ir cph modelius:

$$sph = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (1 - h)^2}},$$

$$cph = \frac{1 - h}{\sqrt{h^2 + (1 - h)^2}},$$

h – kampo dydis matuojamas h parametrais, čia

$$0 \le h \le 1.$$

Nuo kampo (α) sistemos prie aukštinės (h) sistemos, arba atvirkščiai, pereinama sprendžiant sąsajos formules:

$$h = \frac{\tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)},$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{h}{1 - h}\right).$$

3. Koordinačių perskaičiavimas, kai matematinių modelių pagrindas – h-geometrijos funkcijos sph ir cph

Perėję prie h-geometrijos funkcijų, pagrindines lygtis (1–3) galėsime rašyti:

$$X = (N + H)\cdot \mathrm{cph}\,B\cdot \mathrm{cph}\,L, \tag{25}$$

$$Y = (N + H)\cdot \mathrm{cph}\,B\cdot \mathrm{sph}\,L, \tag{26}$$

$$Z = \left[(1-e^2)\cdot N + H\right]\cdot \mathrm{sph}\,B, \tag{27}$$

čia funkcijos sph ir cph apibrėžiamos (Zanevičius 2008):

$$\mathrm{sph}\,B = \frac{hB}{\sqrt{hB^2 + (1 - hB)^2}}, \tag{28}$$

$$\mathrm{cph}\,B = \frac{1 - hB}{\sqrt{hB^2 + (1 - hB)^2}}, \tag{29}$$

$$\mathrm{sph}\,L = \frac{hL}{\sqrt{hL^2 + (1 - hL)^2}}, \tag{30}$$

$$\mathrm{cph}\,L = \frac{1 - hL}{\sqrt{hL^2 + (1 - hL)^2}} \tag{31}$$

bei

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{e^2}{1 + \left(\dfrac{1}{hB} - 1\right)^2}}}, \tag{32}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \tag{33}$$

Kad skaičiavimo rezultatus galima būtų sulyginti ir pagal vieną, ir pagal kitą parametrų sistemą, taikysime formules, kurios nustato ryšį tarp šių sistemų parametrų:

$$hB = \frac{\tan(B)}{1 + \tan(B)}, \tag{34}$$

$$hL = \frac{\tan(L)}{1 + \tan(L)}. \tag{35}$$

1 uždavinys

Duota:

$a = 6\ 378\ 137$,
$b = 6\ 356\ 752$,

$H = 92{,}477$

ir

$B = 0{,}965\ 490\ 62$,

$L = 0{,}381\ 045\ 582$.

Pagal (34) ir (35) gausime

$$hB = 0{,}591\ 032\ 52, \tag{36}$$

$$hL = 0{,}286\ 033\ 33. \tag{37}$$

Iš (25–33):

$$X = 3{,}376\ 643\ 446\times 10^6, \tag{38}$$

$$Y = 1{,}352\ 769\ 849\times 10^6, \tag{39}$$

$$Z = 5{,}221\ 718\ 354\times 10^6. \tag{40}$$

Palyginę (11–13) su (38–40) matome, kad skaičiavimo rezultatai visai sutampa, nors skaičiavimo technologija, taikant h-geometrijos matematinius modelius, supaprastėja (trumpėja kompiuterinio skaičiavimo trukmė).

2 uždavinys

Priklausomybes (25), (26) pakelkime kvadratu ir sudėkime. Įvertindami tai, kad

$$(\mathrm{sph}\ L)^2 + (\mathrm{cph}\ L)^2 \ll 1, \tag{41}$$

gauname

$$X^2 + Y^2 = (N + H)^2\cdot(\mathrm{cph}\ B)^2. \tag{42}$$

Pažymėkime

$$X^2 + Y^2 = kh, \tag{43}$$

$$hB = x. \tag{44}$$

Vietoje (42) galime rašyti

$$\left[\left[\frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cdot\dfrac{x^2}{x^2 + (1 - x)^2}}} + H\right]^2 \rightarrow \right.$$

$$\left.\frac{(1 - x)^2}{x^2 + (1 - x)^2}\right] - kh = 0. \tag{45}$$

Lygtį (45) spręsime skaitiniu būdu, taikydami specialią *Mathcad* funkciją *root*. Įvertindami tai, kad

$$\mathrm{kh} = 1{,}323\times 10^{13}, \tag{46}$$

gausime:

$$\mathrm{root}\left[\left[\left[\left[\frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\dfrac{x^2}{x^2+(1-x)^2}}}+H\right]^2\cdot\frac{(1-x)^2}{x^2+(1-x)^2}\right]-\mathrm{kh}\right],x,0,1\right]\to = 0{,}591. \tag{47}$$

Kaip matome iš (47), (44),

$$\mathrm{hB} = 0{,}591. \tag{48}$$

Tai atitinka pradinį hB dydį (36). Taigi lygties (45) sprendimas yra teisingas.

Palyginti su 2 uždavinio sprendimu taikant klasikinės geometrijos funkcijas sin ir cos (14–24), kai būtinos daugkartinės iteracijos, sprendimas taikant h-geometrines funkcijas sph ir cph (47) yra daug paprastesnis ir trunka žymiai trumpiau. Tai ypač aktualu kitoje kosminės mechanikos srityje – raketų pakilimo ir nusileidimo trajektorijų (kosminės balistikos) skaičiavimuose. Kitų kosminės mechanikos uždavinių sprendimus, taikant h-geometrijos funkcijas sph ir cph, galima rasti D. Zanevičiaus knygoje (2010).

4. Išvados

Atsisakius klasikinės geometrijos funkcijų sin ir cos, kurios neturi analitinių išraiškų ir gali būti apskaičiuotos tik išskleistos begaline eilute, ir perėjus prie h-geometrijos funkcijų sph ir cph, kurios turi analitines išraiškas, geodezinių koordinačių perskaičiavimo modeliai supaprastėja (paspartėja kompiuterinis skaičiavimas).

Literatūra

Skeivalas, J. 2004. *Elektroniniai geodeziniai prietaisai*. Vilnius: Technika. 193 p.

Zanevičius, D. 2008. *h-GEOMETRY Neo-sines in mechanics*. Vilnius: Count Line. 221 p.

Zanevičius, D. 2010. *h-GEOMETRY Neo-sines in space mechanics*. Vilnius: RDI Grupė (spaudoje).

Donaldas ZANEVIČIUS. Space Technology Research Center. Šermukšnių g. 3, LT-35113 Panevėžys, Lithuania. Tel.+370 6 875 6501, e-mail: *dzanevicius@yahoo.com*.

Doctor of Science. The author of four books and more 40 scientific papers.

Research interests: space mechanics.

Faustas KERŠYS. Space Technology Research Center. Šermukšnių g. 3, LT-35113 Panevėžys, Lithuania. Tel. +370 6 983 0979, e-mail: f*austas@baltgina.lt*.

Research interests: space mechanics.