



SLUOKSNIUOTŪJŲ KONSTRUKCIJŲ ĮTEMPIŲ IR DEFORMACIJŲ BŪVIO BEI VALKŠNUMO ANALIZĖ, VEIKIANT ILGALAIKEI APKROVAI

Gediminas Marčiukaitis¹, Robertas Balevičius²

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva

El. paštas: ¹gelz@st.vgtu.lt; ²robertas.balevicius@st.vgtu.lt

Įteikta 2009 07 08; priimta 2009 10 01

Santrauka. Sluoksniuotojo kompozito ilgalaikė įtempimų ir deformacijų būvio analizei atlikti pasiūlyti skaitiniai ir analitiniai modeliai. Jie leidžia prognozuoti kompozitinių konstrukcijų, pagamintų iš bet kokio skaičiaus sluoksnių, kuriems būdingas ilgainiui pasireiškiantis senėjimas, tampriai valkšnios deformacijos savybes per laiką. Skaitinis modelis grindžiamas Volterra lygties skaitine formuluote, kai kintančių laike sluoksnių įtempimų sukeltoms suminėms deformacijoms nustatyti taikomas poveikių superpozicijos principas, leidžiantis sumuoti šių sluoksnių įtempimų prieaugių sukeltas deformacijas. Pasiūlyti analitiniai modeliai remiasi senėjančios medžiagos efektyviojo modulio metodo pritaikymu. Atlikta modelių verifikacija bei pateiktas nuoseklus trisluoksnių sienos skaičiavimo pavyzdys, kuris gali būti naudingas statybos inžinieriui, projektuojančiam kompozitines konstrukcijas. Tiesioginio skaičiavimo būdu taip pat parodyta, kad analitinis modelis duoda skaitiniu būdu gautus rezultatus. Sudalijus nagrinėjamą laiko intervalą į gana mažus laiko tarpsnius, skaitinis sprendimas yra laikytinas tikslu. Taikant skaitinį ir analitinį modelius, nustatant jų privalumus ir galimybes, analizuoti įtempimų ir deformacijų pasiskirstymo tarp sluoksnių dėsniai, apskaičiuoti valkšnumo parametrai.

Reikšminiai žodžiai: sluoksniuotoji konstrukcija, įtempimų persiskirstymas, senėjimo ir valkšnumo koeficientai, kompozito valkšnumo matas.

1. Įvadas

Pastaruosiu metu statyboje vis daugiau naudojama gaminių ir konstrukcijų, sudarytų iš skirtingų medžiagų sluoksnių. Gaminami ir naudojami įvairūs sluoksniuotieji dirbiniai, pastatų sienos daromos iš skirtingų standžiai surištų medžiagų sluoksnių. Net ir paprasto mūro siena iš įvairių plytų ar blokelių taip pat yra sluoksniuotas gaminys. Vienas sluoksnių gali būti iš plytų ir blokelių, turinčių skirtingas fizikines-mechanines savybes, kitas – iš monolitinio betono. Normatyviniuose dokumentuose pateikiami tik kai kurių medžiagų valkšnumo parametrai ir trūksta duomenų, jeigu dirbiniai arba konstrukcija sudaryti iš skirtingų standžiaisiais ryšiais sujungtų sluoksnių. Norint nustatyti tokio gaminio ar konstrukcijos, veikiamos sluoksnių išdėstymo kryptimi, apkrovos bendrą deformavimąsi reikia įvertinti atskirų sluoksnių medžiagų savybių kitimą bėgant laikui. Ypač svarbu įvertinti deformacinių savybių, ku-

rios turi pagrindinę įtaką įrąžų persiskirstymui tarp sluoksnių, kitimą. Esant dideliame deformacinių savybių skirtumui, galimas atskirų sluoksnių perkrovimas ir irimas, kitiems sluoksniams net nepasiekus savo ribinių parametrų. Tik medžiagų ir atskirų greta esančių sluoksnių bei jų derinių skirtingomis deformacijomis galima paaiškinti dažnus atvejus, kai supleišėja sienų ir kitų konstrukcijų sluoksniai, atsiranda plyšių tarp viensluoksnių vidinių sluoksniuotojų išorinių sienų, išsikreivina sluoksniuotieji gaminiai (įvairūs blokeliai, termoizoliaciniai dirbiniai) ir pan. Praktika rodo, kad sluoksnių deformacijų suderinamumas yra viena iš pagrindinių problemų projektuojant kokybiškas ir ilgalaikes konstrukcijas bei dirbinius.

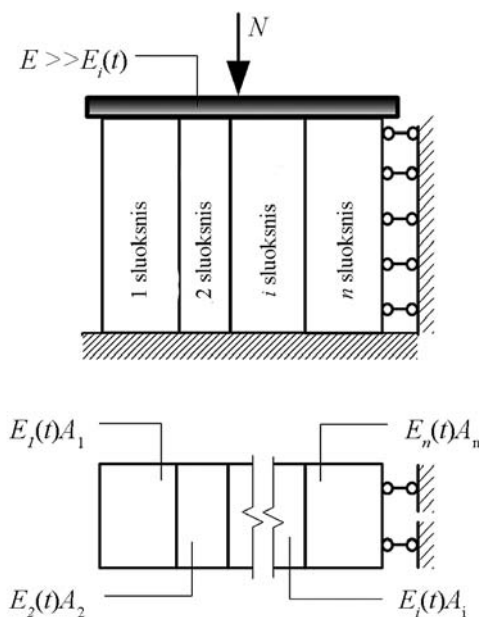
Kaip žinoma, nėra bendros teorijos pagrindinių statybinių medžiagų, ypač betono, valkšnumo deformacijoms nustatyti. Tuo galima paaiškinti trūkumą analitinių ir teorinių darbų apie gaminių, sudarytų iš

skirtingų medžiagų savybių sluoksnių, deformavimąsi. Statybos aikštelėje arba gamykloje gaminant sluoksniuotąsias konstrukcijas vienas ar keli sluoksniai paprastai būna pagaminti iš gerokai „senesnio“ amžiaus medžiagų ir jų savybės ilgainiui keičiasi mažiau nei „jaunesnio“ amžiaus sluoksnių. Pavyzdžiui, gali būti užbetonuotas „šviežio“ betono sluoksnis šalia „seno“ betono sluoksnio, pakloto anksčiau. Vadinasi, atskirų sluoksnių savybės, veikiant apkrovai, kinta skirtingai laikui bėgant. Skirtingai vyksta ir įrąžų pasiskirstymas tarp sluoksnių. Tiesiogiai pritaikyti vieną iš plačiai žinomų trijų valkšnumo teorijų (tampriai valkšnaus kūno, tampraus paveldimumo ar senėjimo), kurios skirtingai vertina ilgainiui pasireiškiančias tampriai valkšnias medžiagos savybes, yra nemažai sunkumų. Todėl norint įvertinti medžiagos deformacinių savybių ir valkšnumo kitimo kreivių pobūdį ir kartu „senėjimo“ veiksnį, reikia ieškoti būdų sprendžiant minėtų teorijų atitikimo lygtis ir nustatant jų parametrus.

Straipsnyje pasirinktoms lygtims spręsti ir joms pritaikyti imami du modeliai. Naudojant skaitinį ir analitinį modelius, nustatant jų privalumus ir galimybes, analizuoti įtempių ir deformacijų pasiskirstymo tarp sluoksnių dėsniai, apskaičiuoti valkšnumo parametrai.

2. Teorinis analizės pagrindas

Nagrinėkime sluoksniuotojo kompozito, sudaryto iš n sluoksnių, išdėstytų išilgai apkrovos veikimo krypties, elgseną per laiką t (1 pav.).



1 pav. Sluoksniuotosios kompozitinės struktūros schema

Fig. 1. Schema of multilayered composite structure

Tegul šių sluoksnių standumai $E_1(t)A_1, E_2(t)A_2, E_i(t)A_i, \dots, E_n(t)A_n$ (čia A_i – i -tojo sluoksnio skerspjūvio plotas) ilgainiui kinta dėl jų tamprumo modulių $E_i(t)$ kaitos per laiką. Sluoksniai pagaminti iš tampriai valkšnios medžiagos bei apkrauti ilgalaikę *nekintančią* apkrovą N . Sakykime, kad deformuojantis konstrukcijai atskirų jos sluoksnių poslinkiai nesiskiria nuo visos konstrukcijos, o apkrova yra centriškai perduodama kiekvienam sluoksniui per standžią plokštę, kurios $E > E_i(t)$. Taigi tokios konstrukcijos elgsenai aprašyti pakanka dviejų lygčių, išreiškiančių sluoksnių vidinių jėgų ir apkrovos pusiausvyrą bei sluoksnių deformacijų darną laiko momentu t :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i(t) A_i = N \\ \varepsilon_c(t) - \varepsilon_i(t) = 0 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

čia: $\sigma_i(t)$ ir $\varepsilon_i(t)$ yra i -tojo sluoksnio įtempis ir deformacija laiko momentu t ; $\varepsilon_c(t)$ – viso kompozito deformacija laiko momentu t .

Nagrinėkime *tampriai akimirksninę*, kai $t = t_0$ (čia t_0 – apkrovos pridėjimo laiko momentas), sluoksniuotojo kompozito elgseną. Šiuo etapu laikysime, kad sluoksniai deformuojasi *tampriai*, todėl:

$$\varepsilon_i(t_0) = \frac{\sigma_i(t_0)}{E_i(t_0)}. \quad (2)$$

Įstatę šią priklausomybę į lygčių sistemą (1) gauname pagrindinius kompozito įtempių ir deformacijų būvio rodiklius apkrovimo momentu:

$$\sigma_c(t_0) = \frac{N}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_c(t_0) = \frac{N}{\sum_{i=1}^{i=n} E_i(t_0) A_i}, \quad (4)$$

$$E_c(t_0) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} E_i(t_0) A_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

čia $\sigma_c(t_0)$, $\varepsilon_c(t_0)$, $E_c(t_0)$ – kompozito įtempiai, deformacijos ir tamprumo modulis apkrovimo metu.

Reikia pažymėti, kad išraiška (5) parodo, jog parenkant sluoksniuotąjį kompozitą, jo tamprumo modulio reikšmė užims tarpinę padėtį tarp atskirų sluoksnių tamprumo modulių reikšmių.

Išsprendę lygčių sistemą (1) įtempių, atsirandančių atskiruose sluoksniuose, atžvilgiu gauname tokią formulę:

$$\sigma_i(t_0) = \frac{NE_i(t_0)}{\sum_{i=1}^{i=n} E_i(t_0)A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Įtempių pasiskirstymas kompozito sluoksniuose gali būti nustatomas pagal tokią formulę:

$$\sigma_i(t_0) = \sigma_j(t_0) \frac{E_i(t_0)}{E_j(t_0)}, \quad i \neq j; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Ji iš esmės reiškia j -ojo sluoksnio įtempio redukavimą į i -tojo sluoksnio įtempį. Kadangi $i \neq j$, gaunama iš dalies dalies neglodi tarp sluoksnių įtempių funkcija.

Formulės (1), (5) ir (6) taip pat buvo gautos Marčiukaičio (1998a, b), Marčiukaičio (2001), Zabulionio *et al.* (2006) darbuose.

Atlikime sluoksniuotojo kompozito elgseną laiku t . Priklausomai nuo sluoksnių valkšnumo deformacijų reikšimosi laipsnio įtempiai sluoksniuose ilgainiui ima kisti. Todėl, laikydamiesi poveikių superpozicijos principo, sluoksnių sumines deformacijas laiku t , sukeltas kintamų laikui bėgant įtempių $\sigma_i(\tau) \neq \text{const}$, nustatyme sumuodami deformacijas, sukeltas atskirų įtempių prieaugių $d\sigma_i(t)$. Esant bet kokioms įtempių $\sigma_i(t)$ kaitos laike funkcijoms, minėta sumavimo procedūra gali būti pakeista Volterra integralu (Прокопович, Зедгенидзе 1980):

$$\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t_0)J_i(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_i(\tau)}{d\tau} J_i(t, \tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

čia

$$J_i(t, \tau) = \frac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t, \tau) \quad (9)$$

yra suminė i -tojo sluoksnio deformacija, sukelta vienetinio įtempio, $C_i(t, \tau)$, yra šio sluoksnio valkšnumo matas.

Deja, analitinis lygties (8) sprendimas net ir esant paprasčiausioms $J_i(t, \tau)$ funkcijoms yra komplikuotas. Paprastai ši lygtis analitiškai išsprendžiama priėmus prielaidą apie valkšnumo mato kreivių lygiagretumą arba nevertinant medžiagos senėjimo (pavyzdžiui, labai „senas“ betonai), t. y. laikant, kad $J_i(t, \tau) = J_i(t - \tau)$ bei $E_i(\tau) = E_i = \text{const}$. Šios prielaidos lemia paklaidas ir nuokrypius nuo poveikių superpozicijos principo, o valkšnumo funkcijų parametrų tam tikra korekcija pagal eksperimentinių tyrimų rezultatus, paliekant galioti tas pačias prielaidas, sukuria dirbtinį netiesiškumą tarp įtempių ir deformacijų efektą (Bazant, Najjar 1973).

Nustačius kompozito deformaciją, galima prognozuoti jo valkšnumo koeficientą. Šis koeficientas apskai-

čiuojamas kaip kompozito valkšnumo bei tampriosios deformacijų santykis:

$$\varphi_c(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{c,cr}(t)}{\varepsilon_{c,el}(t_0)} = \frac{\varepsilon_c(t)}{\varepsilon_c(t_0)} - 1, \quad (10)$$

čia $\varepsilon_{c,cr}(t) = \varepsilon_{c,cr}(t) - \varepsilon_c(t_0)$ – kompozito valkšnumo deformacija, o $\varepsilon_{c,el}(t_0) = \varepsilon_c(t_0)$ yra tampri jo deformacija.

Kadangi sluoksniuotojo kompozito valkšnumo koeficientas akumuliuoja visą sluoksnių įtempių kaitos per laiką istoriją, tuomet kompozito deformaciją galima prognozuoti pagal tokią priklausomybę

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0)J_c(t, t_0), \quad (11)$$

čia

$$J_c(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} (1 + \varphi_c(t, t_0)) \quad (12)$$

yra kompozito deformacija, sukelta vienetinio įtempio.

Taigi, prognozuojant sluoksniuotojo kompozito ilgalaikę elgseną, faktiškai uždavinys gali būti sukongcentruotas į jo valkšnumo koeficiento radimą. Jis akumuliuoja visą sluoksnių įtempių kaitos istoriją, kurios įvertinimas taikant poveikių superpoziciją (8), kaip minėta, analitiškai neišsprendžiamas. Todėl kitame skyriuje atliekamas sluoksniuotojo kompozito ilgalaičės elgsenos modeliavimas pasitelkus žinomus skaitinius metodus lygties (8) integralui eliminuoti.

3. Skaitinis modelis

Skaitiniame modelyje ieškomųjų įtempių funkcijai $\sigma_i(t)$ taikant apibendrintą vidurkio teoremą, pointegraliniame reiškinyje (8) būtina eliminuoti įtempių kitimo greitį $\frac{d\sigma_i(\tau)}{d\tau}$. Tuo tikslu, atlikę dalinį reiškinio (8) integravimą, gauname:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E_i(t)} - \int_{t_0}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial J_i(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Dabar diskretizuokime tam tikro dydžio nagrinėjamą laiko intervalą $t_k - t_0$ smulkiais laiko tarpais, $t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_j, \dots, t_k$. Diskrečiame laiko intervale, kai $t_j - t_{j-1} \rightarrow 0$, matematiškai korektiška vidutinius įtempius, tenkinančius Volterra integralinį reiškinių, laikyti vidutiniais intervalo įtempiais. Tokiu būdu reiškinio (13) integralą lengvai galime pakeisti rekurenčiąja deformacijų suma minėtiems laiko tarpams:

$$\varepsilon_i(t_k) = \frac{\sigma_i(t_k)}{E_i(t_k)} + \sum_{j=1}^{j=k-1} \sigma_{\varepsilon,i}(t_j, t_{j-1}) [J_i(t_k, t_{j-1}) - J_i(t_k, t_j)] + \sigma_{\varepsilon,i}(t_k, t_{k-1}) C_i^*(t_k, t_{k-1}), \quad i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, k=k, \quad (14)$$

čia $\sigma_{\varepsilon,i}(t_j, t_{j-1}) = \sigma_i(t_j)/2 + \sigma_j(t_{j-1})/2$ yra i -tojo sluoksnio vidutiniai įtempiai intervale $[t_{j-1}, t_j]$, o $C_i^*(t_k, t_{k-1}) = \frac{1}{E_i(t_{k-1})} - \frac{1}{E_i(t_k)} + C_i(t_k, t_{k-1})$ yra grynojo valkšnumo matas (Александровский 1973; Марчукайтис, Дулинскас 1974).

Iš (14) formulės išsireiškę įtempiai $\sigma_i(t_k)$ ir juos įsistatę į lygčių sistemą (1) vietoj $\sigma_i(t)$ gauname sluoksniuotojo kompozito deformacijas nagrinėjamo laiku $t = t_k$:

$$\varepsilon_c(t_k) = \left(2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{2/E_i(t_k) + C_i^*(t_k, t_{k-1})} \right)^{-1} \left(N + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sum_{j=1}^{j=k-1} \sigma_{\varepsilon,i}(t_j, t_{j-1}) [J_i(t_k, t_{j-1}) - J_i(t_k, t_j)] + \sigma_i(t_{k-1}) C_i^*(t_k, t_{k-1})}{2/E_i(t_k) + C_i^*(t_k, t_{k-1})} A_i \right), \quad (15)$$

čia $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, k = k.$

Kaip matyti iš priklausomybės, sluoksniuotojo kompozito deformaciją galima nustatyti bet kuriuo nagrinėjamo laiko momentu t_k , atsižvelgiant į visą sluoksnių įtempių kitimo istoriją iki nagrinėjamo momento. Būtina pabrėžti, kad esant mažam laiko žingsniui, (15) formulę galima laikyti tiksliai lygčių sistemos (1) sprendiniu. Apskaičiavus sluoksniuotojo kompozito deformaciją, atskiro sluoksnio įtempiai galima gauti pasiūdojus (14) formule.

Reikia pasakyti, kad (15) išraiškos skaitinei realizacijai turi būti taikomas gana mažas skaičiavimo žingsnis, o tam, prireikus analizuoti ilgus laiko tarpusius, praėjusius nuo apkrovimo pradžios, reikia labai daug kompiuterio darbo laiko sąnaudų. Todėl skaičiuojant buvo pasirinktas ilgainiui plėtantis laiko žingsnis, $\Delta t_j = \sqrt[10]{10} \Delta t_{j-1}$, naudojant pirmam nagrinėjamam laikotarpiui daugeliu atvejų pakankamą 0,01 dienos reikšmę. Detalesnę žingsnio pasirinkimo analizę ir kitas jo aprašymo formules pateikia Zabulionis ir Gailius (2007).

4. Analitinis modelis

Tenka pasakyti, kad praktiniams skaičiavimams priklausomybė (15) nėra labai paranki, nes statybos inžinieriui tektų sugaišti nemažai laiko prognozuojant sluoksniuotojo kompozito ilgalaikes savybes, kadangi

formulėje vertinama visa įtempių kaitos istorija, vykusi iki nagrinėjamo momento. Skaičiavimui automatizuoti taip pat reikėtų papildomų programavimo žinių bei žinių apie galimas paklaidas, su kuriomis susiduriama tokio pobūdžio analizėje. Taigi, kokios būtų skaičiavimo alternatyvos, jei lygtys (8) ar (13) analitiškai paprastai yra neišsprendžiamos?

Atmetę empirinius modelius kaip stokojančius universalumo bei tinkamus tik konkrečioms atvejams, remsimės mokslininko Trosto pasiūlyta formuluote (Trost 1967). Pradžioje jo siūlymas buvo labiau intuityvus, bet vėliau Bazant (1972) griežtai suformulavo Trosto pasiūlytas priklausomybes ir parodė metodo privalumus lyginamas su iki tol pasiūlytais (Bazant, Najjar 1973) metodais. Beje, pastaruoju metodu grindžiami gelžbetoninių konstrukcijų ilgalaikės analizės modeliai euronormose (EN 1992-1-1, 2004) bei JAV projektavimo normose (ACI 209R-92, 1992; ACI 435R-95, 2003).

Remiantis Trost (1967), (8) priklausomybė iš antrojo laipsnio integralinės Volterra lygties gali būti analitiškai pertvarkyta į algebrinę lygtį, jeigu žinomas medžiagos senėjimo koeficientas $\chi(t, t_0)$:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t_0)}{E_{e,i}(t)} + \frac{\Delta \sigma_i(t)}{E_{e,i}(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$E_{e,i}(t) = \frac{E_i(t_0)}{1 + \varphi_i(t, t_0)}, \quad (17)$$

$$\overline{E_{e,i}}(t) = \frac{E_i(t_0)}{1 + \chi_i(t, t_0) \varphi_i(t, t_0)}, \quad (18)$$

$$\Delta \sigma_i(t) = \sigma_i(t) - \sigma_i(t_0), \quad (19)$$

čia: $E_{e,i}(t)$ ir $\overline{E_{e,i}}(t)$ i -tojo sluoksnio „senos“ bei senėjančios medžiagų efektyvieji moduliai; $\Delta \sigma_i(t)$ – šio sluoksnio įtempių pokytis tarp įtempių nagrinėjamo laiko momentu bei įtempių, atsiradusių apkrovimo momentu; $\varphi_i(t, t_0)$ – šio sluoksnio valkšnumo koeficientas.

Lygtyje (16) nežinomasis dydis yra įtempių prieaugis, o medžiagos senėjimo koeficientas laikomas žinomumu iš anksto. Jo ribinės reikšmės paprastai kinta nuo 0,5 (paprastai pirmuoju laiko žingsniu po apkrovimo) ir artėja į 1,0 („sena“ medžiaga). Būtina pabrėžti, kad jei $\chi(t, t_0)$ yra nustatytas išsprendus lygtis (8) arba (13), tuomet lygtis (16) duoda tikslų sprendinį.

Pritaikykime lygtį (16) sluoksniuotojo kompozito įtempiams ir deformacijoms prognozuoti per laiką. Esant sluoksnių įtempių pokyčiams, bet nekintant apkrovai, sistemos (1) jėgų pusiausvyros lygtis užrašoma taip:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta\sigma_i(t) A_i = 0, i = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

Atsižvelgiant į (12) ir (16) bei priklausomai nuo pasirinkto nežinomojo, galimi du sprendimo variantai. *Pirmas variantas*, kai nežinomieji yra sluoksnių įtempių prieaugiai, tuomet sprendinys ieškomas bet kuriuo laiku t sprendžiant n (čia n yra sluoksnių skaičius) tiesinių lygčių sistemą:

$$[\mathbf{E}_{-1}(t)] \Delta\boldsymbol{\sigma}(t) = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t_0), \tag{21}$$

čia

$$[\mathbf{E}_{-1}(t)] = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{E_{e,1}(t)} & \frac{A_2}{E_{e,2}(t)} & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ \frac{-1}{E_{e,1}(t)} & \frac{1}{E_{e,2}(t)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_{e,2}(t)} & \frac{-1}{E_{e,3}(t)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{E_{e,n-1}(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{E_{e,n-1}(t)} & \frac{-1}{E_{e,n}(t)} \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_1(t) \\ \Delta\sigma_2(t) \\ \Delta\sigma_3(t) \\ \dots \\ \Delta\sigma_{n-1}(t) \\ \Delta\sigma_n(t) \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\sigma_1(t_0)}{E_{e,1}(t)} + \frac{\sigma_2(t_0)}{E_{e,2}(t)} \\ \frac{-\sigma_2(t_0)}{E_{e,2}(t)} + \frac{\sigma_3(t_0)}{E_{e,3}(t)} \\ \dots \\ \frac{-\sigma_{n-2}(t_0)}{E_{e,n-2}(t)} + \frac{\sigma_{n-1}(t_0)}{E_{e,n-1}(t)} \\ \frac{-\sigma_{n-1}(t_0)}{E_{e,n-1}(t)} + \frac{\sigma_n(t_0)}{E_{e,n}(t)} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Jeigu $\det(\mathbf{E}_{-1}(t)) \neq 0$, tuomet lygčių sistema turi sprendinį ir sluoksnių įtempių prieaugis randamas taip:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(t) = [\mathbf{E}_{-1}(t)]^{-1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t_0). \tag{24}$$

Nustačius $\Delta\boldsymbol{\sigma}(t)$, sluoksnių įtempiai laiku t apskaičiuojami iš (19) formulės, o kompozito deformacija gaunama iš (16) priklausomybės, kai $\varepsilon_c(t) = \varepsilon_i(t)$.

Antrasis variantas, kai nežinomasis yra kompozito deformacija, tuomet ieškomas dydis nustatomas taip:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i(t_0) A_i \frac{E_{e,i}(t)}{E_{e,i}(t)}}{\sum_{i=1}^{i=n} E_{e,i}(t) A_i} \tag{25}$$

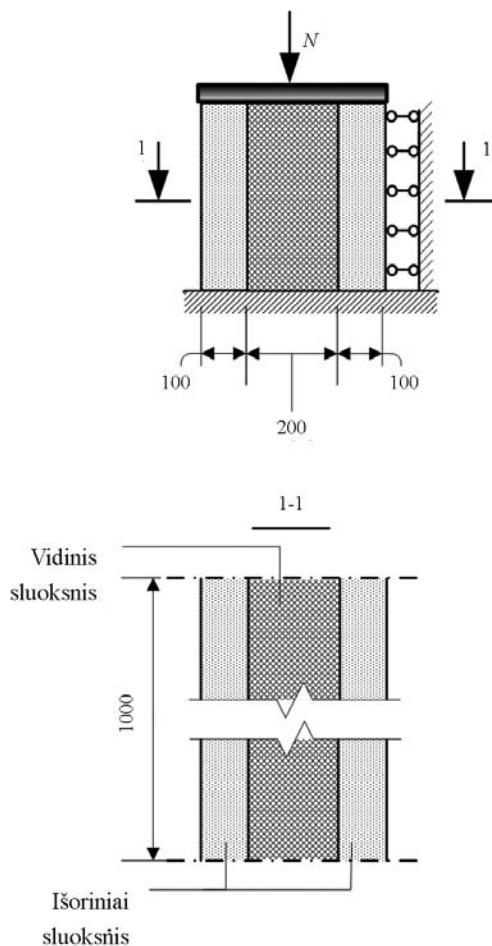
Nustačius $\varepsilon_i(t)$, iš (16) priklausomybės išsireiškiami sluoksnių įtempių prieaugiai $\Delta\sigma_i$ bei patys įtempiai iš (19) formulės.

Autorių nuomone, antrasis sprendimo būdas yra daug paprastesnis nei pirmasis variantas, kai matriciniu keliu ieškomi įtempių prieaugiai. Matricinis lygčių sprendimas sluoksnių įtempių atžvilgiu buvo taikytas darbe (Zabulionis *et al.* 2006).

Kitame skyriuje parodysime, kaip pasiūlyti skaitiniai ir analitiniai metodai taikomi konkrečiam sienos pavyzdžiui, aptarsime gautus rezultatus.

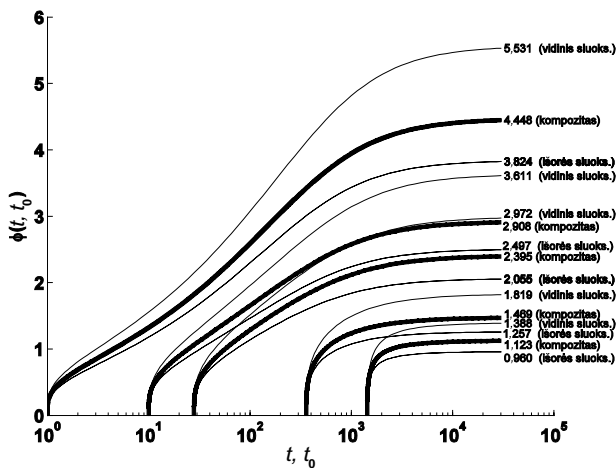
5. Analizė ir rezultatų aptarimas

Nagrinėjame trislauksnę sieną (2 pav.), sudarytą iš dviejų išorinių sluoksnių, pagamintų to paties vidutinio stiprumo C25/30 klasės betono bei vidinio sluoksniu, kuriam panaudotas silpnas C8/10 klasės betonas. Išorinių sluoksnių storis – 0,1 m, vidinio – 0,2 m. Sieną veikia ilgalaikė nekintama apkrova, kurios dydis yra $N = 100$ kN. Dabar „išpjaukime“ 1,0 m ilgio nagrinėjamąjį ruožą (2 pav.), teigdami, kad šiam ruožui būdinga sluoksniuotojo kompozito elgsena bus bet kurioje sienos ilgio vietoje. Tuomet išorinių sluoksnių plotai bus: $A_1 = A_3 = 0,1$ m², o vidinio $A_2 = 0,2$ m².



2 pav. Nagrinėjamos trislauksnės sienos schema
Fig. 2. Schema for analysis of a three-layered wall

Nagrinėsime įvairiame amžiuje apkrauto sluoksniuotojo kompozito įtempių ir deformacijų kaitą per laiką. Skaičiuodami taikysime betono valkšnumo parametrus, nustatytus pagal normas (EN 1992-1-1, 2004). Tamprumo modulio kitimo laike ir jo sąryšio su vidutiniu cilindrų stipriu matematiniam aprašymui naudosisime taip pat gerai žinomas priklausomybes: $E_c(t_0) = \sqrt{\beta_{cc}(t_0)} E_c(28)$ ir $E_c(28) = 2,15 \cdot 10^4 \sqrt[3]{f_{cm}/10}$, (čia $\beta_{cc}(t_0)$ – koeficientas, įvertinantis cemento hidratacijos įtaką betono stiprumui). Išorinių bei vidinio sluoksnių betono valkšnumo koeficientų funkcijų kitimas parodytas 3 pav. Kaip matyti, vidinis sluoksnis yra pagamintas iš labiau besideformuojančios medžiagos nei išoriniai sluoksniai, nes jo valkšnumo koeficientas yra didesnis už išorinių sluoksnių koeficientą.



3 pav. Valkšnumo koeficientai: atskirų sluoksnių (plonos linijos), kompozito (pastorintos linijos)

Fig. 3. Creep coefficients: for the layers (thin lines), for the whole composite (bold lines)

Prognozuojama sluoksniuotojo kompozito elgsena laiku t buvo nagrinėta dviem atvejais: įvertinus visų sluoksnių tamprumo modulio kitimą per laiką, kai $E_i(t) \neq E_i(t_0)$, bei laikant šiuos modulius invariantiškais laikui, t. y. $E_i(t) = E_i(t_0) = \text{const}$. Apkrovimo laikas t_0 buvo imtas lygus 1, 10, 28, 360 ir 1440 parų.

Taigi, remiantis 2 skyriuje pasiūlytu skaitiniu modeliu, pagal (15) formulę buvo apskaičiuotos sluoksniuotojo kompozito deformacijų kitimas per laiką (4 pav., c, f). Gavus šias deformacijas, atskirų sluoksnių įtempių funkcijos (4 pav., b, e) išsirinktos iš (14) priklausomybės; šių sluoksnių senėjimo koeficientai (4 pav., a, d) analogiškai gauti pasinaudojus pereinamomis (16–19). Kadangi betono valkšnumo koeficiento funkcijos yra monotoniškos, tai ir visi ieškomi

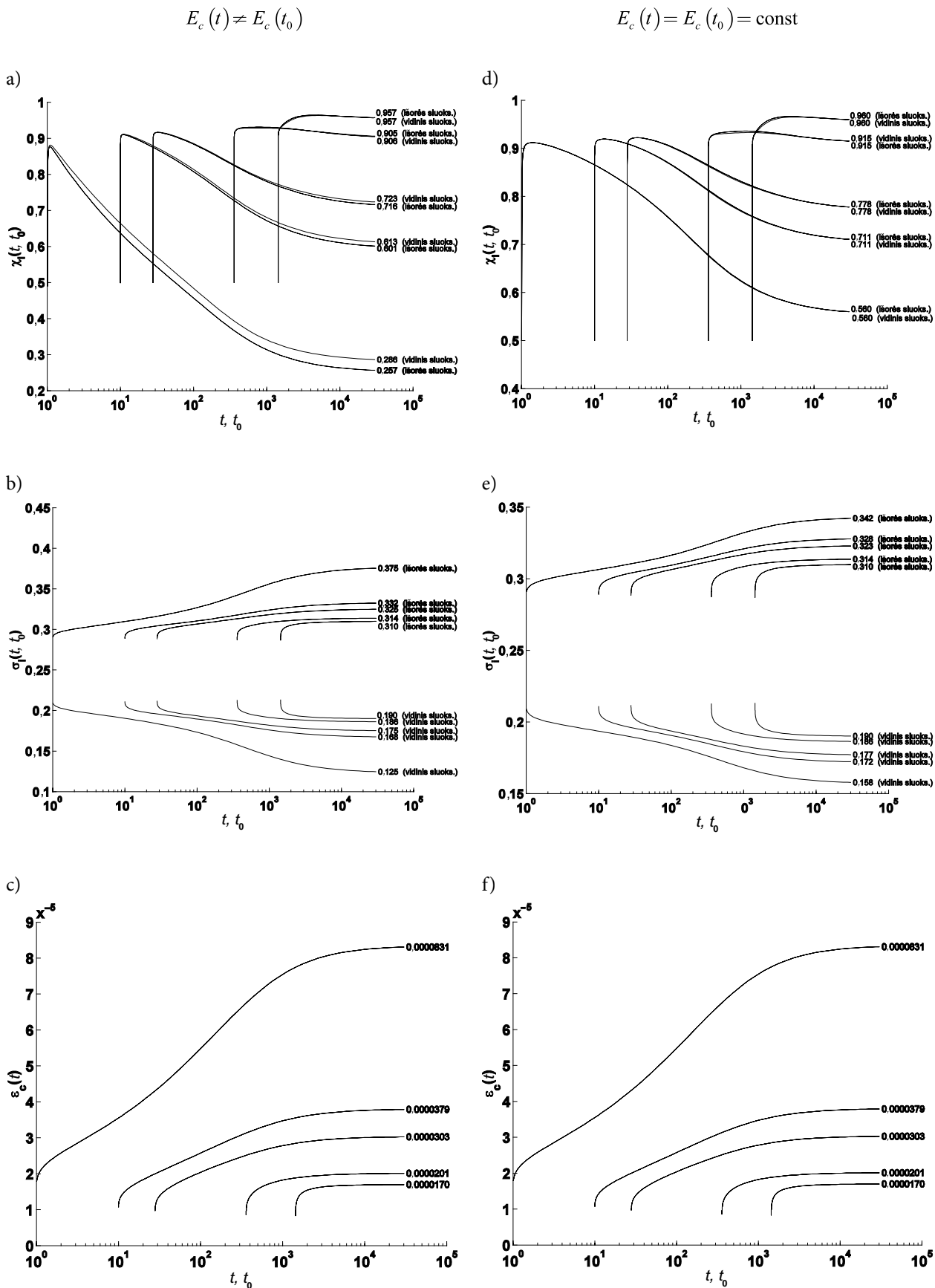
įtempių ir deformacijų parametrai (4 pav.) taip pat ilgainiui kinta monotoniškai. Nauja senėjimo koeficiento formulė pasiūlyta Balevičiaus darbe (2009).

Detalesnė gautų rezultatų (4 pav.) analizė rodo, kad sluoksnių įtempių kaitoje per laiką (4 pav., b, e) vyksta šių įtempių persiskirstymas, t. y. labiau besideformuojantis (vidinis) sluoksnis ilgainiui „nusikrauna“, perduodamas savo „naštą“ sluoksniams, turintiems mažesnes deformacijas (išoriniams), todėl šių sluoksnių įtempiai auga laikui einant. Šis procesas neišvengiamas, nes dėl sluoksnių skirtingų valkšnumo deformacijų vystymosi laike, sumažėjus vieno sluoksniuotojo įtempiui, kitų sluoksnių įtempiai būtinai padidės, kad nebūtų pažeista pusiausvyra tarp vidinių jėgų, atsiradusių sluoksniuose, ir išorinės apkrovos. Tai parodo, kad kompozito, veikiamo nekintančia apkrova, sluoksnių įtempiai bus visada kintami, jeigu šiems sluoksniams pagaminti bus naudojamos medžiagos, turinčios skirtingas deformacines savybes. Tačiau jeigu nebūtų užtikrintas sluoksnių tarpusavio sukibimas (negaliojant deformacijų darna), sluoksnių įtempiai kistų kitaip (galimas daiktas, praslydusių sluoksnių įtempiai netgi galėtų išlikti pastovūs).

4 pav., b, e, pateikti grafikai parodo, kad kuo „jaunesniame“ amžiuje apraunamas kompozitas, tuo didesni įtempiai ilgainiui atsiranda mažesnes deformacijas turinčiame sluoksnyje. Betono tamprumo modulio kitimo per laiką ignoravimas rodo, kad „jauniems“ betonams nagrinėjamu laiko momentu būtų prognozuojami mažesni įtempiai (4 pav., b, e, kai $t_0 = 1$ para). Tamprumo modulio kitimas laike lemia ilgainiui ne visą tampriųjų deformacijų atsistatymą krintant įtempiams, o dėl to mažiau besideformuojančio sluoksniuotojo įtempiai auga dar labiau.

Iš esmės sluoksniuotojo įtempių augimas per laiką eksploatuojamoje sluoksniuotojo konstrukcijoje yra labai pavojingas, nes tai gali sukelti jos laikomosios galios praradimą. Todėl būtina teisingai numatyti leistiną labiausiai apkrauto sluoksniuotojo įtempių prieaugį. Ypač svarbu, kad šis prieaugis nesukeltų sluoksniuotojo tiesinių deformacijų virtimo netiesinėmis, kai jo medžiagoje pradėtų formuotis išilginiai plyšiai, ilgainiui besijungiantys į nestabilius magistralinius plyšius, lemiančius konstrukcijos griūtį.

Lyginant šių įtempių sukeltas kompozito deformacijas $\epsilon_c(t)$, apskaičiuotas esant $E_i(t) \neq E_i(t_0)$ (4 pav., c) ir esant $E_i(t) = E_i(t_0) = \text{const}$ (4 pav., f), matyti, kad šios deformacijos yra lygios. Tai reikštų, kad sluoksniuotame kompozite pasireiškęs ne visas sluoksniuotojo tampriųjų deformacijų atsistatymas nedaro įtakos viso



4 pav. Sluoksniuotojo kompozito ir atskirų jo sluoksnių įtempių ir deformacijų būvio parametrų kitimas per laiką t

Fig. 4. Stress-strain state at time t for the whole composite and its layers

kompozito suminėms deformacijoms, o tik sukelia sluoksnių įtempių persiskirstymą. Iš esmės 4 pav., c ir f, pateikti grafikai patvirtina gerai žinomą faktą, kad „jaunas“ betonas deformuojasi daug daugiau nei apkrautas „senesnio“ amžiaus betonas.

Kita vertus, jei visi kompozito sluoksniai yra pagaminti iš medžiagų, turinčių vienodas deformacines savybes, sluoksnių įtempiai ilgainiui išlieka lygūs sluoksnių įtempiams, atsiradusiems apkrovimo metu. Šis procesas būtų panašus, jei apkrautume kompozitą, sudarytą iš „seno“ betono sluoksnių, tuomet įvyktų staigus įtempių persiskirstymas, tačiau po jo įtempiai išliktų pastovūs (4 pav., b, e, esant $t_0 = 1400$ parų), nes „senam“ betonui būdinga, kad $J_i(t - t_0) - J_i(t, t_0) \approx 0$.

Kompozito valkšnumo koeficientas, apskaičiuotas pagal (10) formulę bei jo atskirų sluoksnių valkšnumo koeficientai parodyti 3 pav. Akivaizdu, kad kompozito valkšnumo koeficiento reikšmės užima tarpinę reikšmę tarp jo atskirai paimtų sluoksnių valkšnumo koeficiento reikšmių. Visgi kai kuriais atvejais kompozito valkšnumo matas tam tikru laiko momentu gali būti didesnis už kiekvieno atskirai paimto sluoksnio medžiagos valkšnumo matą (Zabulionis *et al.* 2006).

Kadangi pasiūlytas analitinis modelis yra grindžiamas sluoksnių medžiagų senėjimo koeficientų $\chi_i(t, t_0)$ taikymu, todėl svarbu iširti šių koeficientų kaitą per laiką. Paprastai laikomasi nuomonės, kad prognozuojant gelžbetonio konstrukcijos elgseną praėjus neapibrėžtai ilgam periodui nuo apkrovimo, praktiniams skaičiavimams betono senėjimo koeficientų reikšmės gali būti imamos lygios 0,8 (pvz., EN 1992-1-1, 2004; Lacidogna, Tarantino 1996; Ghali *et al.* 2002).

Kaip matyti iš 4 pav., a, d, pateiktų $\chi_i(t, t_0)$ funkcijų, ši prielaida yra arčiausiai patvirtinimo, kai apkraunamas 28 parų amžiaus betonas. Apkrovus senesnę betoną, jo $\chi_i(3 \cdot 10^4, t_0)$ reikšmės artėja link 0,9–0,95. Visiškai senam betonui teoriškai turėtume $\chi_i(3 \cdot 10^4, t_0) \rightarrow 1,0$. Tačiau jauno betono savybė senti daro milžinišką įtaką senėjimo koeficiento galutinei reikšmei, kuri yra lygi 0,29 ir 0,26, atitinkamai vidiniams ir išorės sluoksniams. Be to, galima pastebėti dar vieną svarbią savybę, t. y. kai $t - t_0 > 360$ parų, sluoksnių senėjimo koeficientų reikšmių kitimas nusistovi ties jau mažai tekintančia riba. Kita pastaba – $\chi_i(t, t_0)$ reikšmės labai priklauso, ypač „jauno“ betono, nuo to, ar skaičiuojant įvertinamas betono tamprumo modulio kitimas per laiką.

Analizuojant 4 pav. a ir d grafikus, ypač svarbu pabrėžti, kad esant invariantiškiems laikui sluoksnių tamprumo moduliams, jų senėjimo koeficientai iš esmės sutampa (4 pav., d). Kai $E_i(t) \neq E_i(t_0)$, tuomet atsiranda

skirtumai tarp $\chi_i(t, t_0)$ reikšmių, ir jos artėja viena prie kitos, didėjant apkrovimo laikui t_0 .

6. Skaičiavimo pavyzdys, modelio patikrinimas

Šiame skyriuje pateiksime pasiūlyto analitinio modelio tiesioginį patikrinimą, spręsdami skaičiavimo pavyzdį. Be to, nuoseklus skaičiavimo pavyzdys gali būti naudingas statybos inžinieriui, projektuojančiam kompozitines konstrukcijas.

Analitiškai išnagrinėkime „jauno“ amžiaus apkrautos sluoksniuotos sienos (2 pav.) elgseną, veikiant ilgalaikiai apkrovai. Tegul apkrovimo laikas yra $t_0 = 1$ para, stebėjimo laikas $t = 3 \cdot 10^4$ paros.

Pasinaudokime 4 pav. a grafikuose pateiktais sluoksnių senėjimo koeficientais bei 3 pav. pateiktais sluoksnių valkšnumo koeficientais. Taigi išorinių sluoksnių senėjimo ir valkšnumo koeficientai yra šie $\chi_1(t, t_0) = \chi_3(t, t_0) = 0,257$, $\varphi_1(t, t_0) = \varphi_3(t, t_0) = 3,824$. Vidinių sluoksnių $\chi_2(t, t_0) = 0,286$ bei $\varphi_2(t, t_0) = 5,531$.

Sluoksnių tamprumo moduliai apkrovos pridėjimo momentu yra šie: $E_1(t_0) = E_3(t_0) = 18\,719,94$ MPa, $E_2(t_0) = 14\,066,17$ MPa. Kadangi sluoksnių senėjimo koeficientai jau buvo nustatyti esant $E_i(t) \neq E_i(t_0)$, todėl toliau skaičiuodami taikysime pradinės tamprumo modulių $E_i(t_0)$ sluoksnių reikšmes.

Tampriai akimirksninė analizė. Pagal (6) formulę apskaičiuojame sluoksnių įtempius apkrovimo metu:

$$\sigma_1(t_0) = \sigma_3(t_0) = \frac{0,1 \cdot 18\,719,94}{2 \cdot 18\,719,94 \cdot 0,1 + 14\,066,17 \cdot 0,2} = 0,2855 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2(t_0) = \frac{0,1 \cdot 14\,066,17}{2 \cdot 18\,719,94 \cdot 0,1 + 14\,066,17 \cdot 0,2} = 0,2145 \text{ MPa}$$

Kompozito pradinis įtempis (3) ir jo tamprumo modulis (5) apskaičiuojami taip:

$$\sigma_c(t_0) = \frac{0,1}{2 \cdot 0,1 + 0,2} = 0,25 \text{ MPa}$$

$$E_c(t_0) = \frac{2 \cdot 18\,719,94 \cdot 0,1 + 14\,066,17 \cdot 0,2}{2 \cdot 0,1 + 0,2} = 16\,393,05 \text{ MPa}$$

Matome, kad kompozito įtempis bei jo tamprumo modulis užima tarpinę reikšmę tarp jo atskirų sluoksnių atitinkamų reikšmių ir jų nevirsija.

Atskirų sluoksnių deformacijos (2), atsiradusios apkrovimo momentu yra:

$$\varepsilon_1(t_0) = \varepsilon_3(t_0) = \frac{0,2855}{18\,719,94} = 1,525 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2(t_0) = \frac{0,2145}{14\,066,17} = 1,525 \cdot 10^{-5}$$

Trisluoksnės kompozitinės sienos deformacijos (4) taip pat turi būti lygios pavienių sluoksnių deformacijoms, nes sluoksniai nepraslysta

$$\varepsilon_c(t_0) = \frac{0,1}{2 \cdot 18\,719,94 \cdot 0,1 + 14\,066,17 \cdot 0,2} = 1,525 \cdot 10^{-5}$$

Identiški sluoksnių deformacijų ir viso kompozito dydžiai, gauti pagal skirtingas formules, parodo šių formulių korektiškumą bei gautų rezultatų galiojimą priimtoms prielaidoms.

Ilgalaikė analizė. Pagal (17) ir (18) priklausomybes nustatome sluoksnių „senos“ bei „senėjančios“ medžiagų efektyviuosius tamprumo modulius:

$$E_{e,1}(t) = E_{e,3}(t) = \frac{18\,719,94}{1 + 3,824} = 3\,880,59 \text{ MPa,}$$

$$E_{e,2}(t) = \frac{14\,066,17}{1 + 5,531} = 2\,153,75 \text{ MPa,}$$

$$\overline{E}_{e,1}(t) = \overline{E}_{e,3}(t) = \frac{18\,719,94}{1 + 0,257 \cdot 3,824} = 9\,441,32 \text{ MPa,}$$

$$\overline{E}_{e,2}(t) = \frac{14\,066,17}{1 + 0,286 \cdot 5,531} = 5\,448,06 \text{ MPa.}$$

Dabar, žinodami sluoksnių efektyviuosius tamprumo modulius, pagal (25) formulę nustatome kompozito deformaciją nagrinėjamu laiku t

$$\varepsilon_c(t) = \frac{2 \cdot 0,2855 \cdot 0,1 \cdot \frac{9\,441,32}{3\,880,59} + 0,2145 \cdot 0,2 \cdot \frac{5\,448,06}{2\,153,75}}{2 \cdot 9\,441,32 \cdot 0,1 + 5\,448,06 \cdot 0,2}$$

$$\varepsilon_c(t) = 8,3092 \cdot 10^{-5}$$

Skaitiniu keliu gauta kompozito deformacija yra lygi $\varepsilon_c(t) = 8,3084 \cdot 10^{-5}$ (4 pav. c grafikas), tai parodo analitiniu modeliu duodamų rezultatų korektiškumą. Skaičiuojant neapvalinus rezultatų, gaunami identiški rezultatai.

Žinodami kompozito deformacijas, iš (16) priklausomybės nustatome sluoksnių įtempių pokyčius, atsiradusius laiku t :

$$\Delta\sigma_1(t) = \Delta\sigma_3(t) = \left(8,3092 \cdot 10^{-5} - \frac{0,2855}{3\,880,59} \right) \cdot 9\,441,32,$$

$$\Delta\sigma_1(t) = \Delta\sigma_3(t) = 0,0899 \text{ MPa,}$$

$$\Delta\sigma_2(t) = \left(8,3092 \cdot 10^{-5} - \frac{0,2145}{2\,153,75} \right) \cdot 5\,448,06 = -0,0899 \text{ MPa.}$$

Čia pastebime, kad neigiamas $\Delta\sigma_2(t)$ pokytis parodo atsiradusį įtempių mažėjimą. Tai reiškia, kad vidiniam sluoksniui būdinga įtempių relaksacija. Teigiamas įtempių pokytis $\Delta\sigma_1(t)$ rodo, kad išoriniuose sluoksniuose ilgainiui vystosi papildomas gniuždymas, kuris lemia išorinių sluoksnių įtempių augimą laiku (4 pav., b).

Taigi, apskaičiavę sluoksnių įtempių pokyčius dabar, taikydami (19) priklausomybę, lengvai gauname ir pačius sluoksnių įtempius laiku t , atitinkamai išoriniams bei vidiniam sluoksniui:

$$\sigma_1(t) = \sigma_3(t) = 0,2855 + 0,0899 = 0,3754 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_2(t) = 0,2145 + (-0,0899) = 0,1246 \text{ MPa.}$$

Palyginę su skaitiniu keliu nustatytais šių sluoksnių įtempiais, pateiktais 4 pav. b grafikuose, pastebime, kad $\sigma_1(t) = \sigma_3(t) = 0,375 \text{ MPa}$ ir $\sigma_2(t) = 0,125 \text{ MPa}$. Tai įrodo gautų rezultatų korektiškumą.

Žinant įtempių ir deformacijų būvio parametrus, galima prognozuoti, koks bus trisluoksnės sienos valkšnumo koeficientas (10):

$$\varphi_c(t, t_0) = \frac{8,3092}{1,525} - 1 = 4,44.$$

Analogiška reikšmė gauta skaitiškai ir pateikta 3 pav. grafike.

Apskaičiavę $\varphi_c(t, t_0)$, sluoksniuotojo kompozito deformaciją taip pat galime gauti ir taikydami (11) formulę:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{0,25}{16\,393,05} (1 + 4,448) = 8,3084 \cdot 10^{-5}$$

Kaip matyti iš šių rezultatų, visi nagrinėti ilgalaikio įtempių ir deformacijų būvio parametrai, nustatyti analitiniu būdu, pasinaudojus tiksliais sluoksnių medžiagų senėjimo reikšmėmis, duoda analogiškus rezultatus, apskaičiuotus skaitiniu keliu išsprendus antrojo laipsnio integralinę Volterra lygtį, atitinkančią poveikių superpozicijos principą.

Pabaigoje patikrinkime matricinį sprendimo atvejį. Taigi pagrindinės matricos ir vektoriai įtempių pokyčiams (24) gauti yra šie:

$$[E_{-1}(t)] = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 1/9441,32 & -1/5448,06 & 0 \\ 0 & 1/5448,06 & -1/9441,32 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{E}_{-1}(t)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0031704 & 6,4479608 & 2,9933591 \\ 0,0018295 & -1,7273008 & 1,7273008 \\ 0,0031704 & -2,9933591 & -6,4479608 \end{bmatrix} \cdot 10^3,$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-0,2855}{3880,59} + \frac{0,2145}{2153,75} \\ \frac{0,2145}{2153,75} + \frac{0,2855}{3880,59} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02602 \\ -0,02602 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Dabar galime surasti įtempių pokyčius (24) sudauginę šias matricas:

$$[\Delta \boldsymbol{\sigma}(t)] = \begin{bmatrix} 0,0031704 & 6,4479608 & 2,9933591 \\ 0,0018295 & -1,7273008 & 1,7273008 \\ 0,0031704 & -2,9933591 & -6,4479608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02602 \\ -0,02602 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta \boldsymbol{\sigma}(t)] = \begin{bmatrix} 0,08988 \\ -0,08988 \\ 0,08988 \end{bmatrix}$$

Kaip matyti iš gautų sluoksnių pokyčių vektoriaus $[\Delta \boldsymbol{\sigma}(t)]$, jo reikšmės atitinka analitinio skaičiavimo rezultatus, gautus taikant (16) formulę. Tai rodo, kad matriciniu būdu taip pat gaunami korektiški rezultatai.

6. Išvados ir rekomendacijos

Sluoksniuotojo kompozito ilgalaikiai įtempių ir deformacijų būvio analizei atlikti pasiūlyti skaitiniai bei analitiniai modeliai. Šie modeliai leidžia prognozuoti kompozitinių konstrukcijų, pagamintų iš medžiagų, kurioms būdingas ilgainiui vykstantis senėjimas, tampriai valkšnios deformacijos, savybes laikui einant.

Skaitinis modelis grindžiamas Volterra lygties skaitine formuluote, kai kintančių laike sluoksnių įtempių sukeltoms suminėms deformacijoms nustatyti taikomas poveikių superpozicijos principas, leidžiantis sumuoti šių sluoksnių įtempių prieaugių sukeltas deformacijas. Pasiūlyti analitiniai modeliai pagrįsti senėjančios medžiagos efektyviojo modulio metodo taikymu.

Atlikta modelių verifikacija ir pateiktas nuoseklus trisluosknės sienos skaičiavimo pavyzdys, kuris gali būti naudingas statybos inžinieriui, projektuojančiam kompozitines konstrukcijas. Tiesioginio skaičiavimo būdu taip pat parodyta, kad analitinis modelis duoda skaitiniu būdu gautus rezultatus. Sudalijus nagrinėjamą laiko intervalą į gana mažus laiko tarpsnius, skaitinis sprendimas yra laikytinas tikslu.

Atsižvelgiant į gautus rezultatus, galima padaryti kai kuriuos apibendrinimus ir rekomendacijas:

1. Apkrovus per laiką nekintančia apkrova sluoksniuotąjį kompozitą, jo sluoksnių įtempiai niekada neišliks pastovūs, jeigu sluoksnių medžiagos turės skirtingų deformacinių savybių, t. y. labiau besideformuojantys sluoksniai stengsis ilgainiui „nusikrauti“, perduodami įtempius mažiau besideformuojantiems sluoksniams, todėl jų įtempiai augs laikui einant. Todėl kompozitinėje konstrukcijoje pažeidimai pirmiausia atsiras mažesnes deformacijas turinčiuose sluoksniuose.
2. Tamprumo modulio kitimas per laiką lemia ilgainiui ne visą tampriųjų deformacijų atsistatymą krintant įtempiams, o tai dar labiau lemia mažiau besideformuojančio sluoksnių įtempių augimą. Be to, kuo „jaunesniame“ amžiuje apraunamas kompozitas, tuo didesni įtempiai ilgainiui išsivysto tokiam sluoksnyje.
3. Sluoksnių senėjimo koeficiento reikšmės lemia medžiagos senėjimo procesas. Sluoksnių senėjimo koeficientai yra skirtingi. Tačiau apkrovus 28 parų ir senesnio amžiaus kompozitą sluoksnių senėjimo koeficientai skiriasi labai mažai. Be to, svarbu pabrėžti, kad esant invariantiškiems laikui sluoksnių tamprumo moduliams, jų senėjimo koeficientai iš esmės sutampa.
4. Praktiniams skaičiavimams taikant pasiūlytą analitinį modelį, kai reikia prognozuoti sluoksniuotojo kompozito elgseną ilgesniu nei 360 parų laikotarpiu visų sluoksnių senėjimo koeficientą be didesnės paklaidos galima imti lygų 0,8. Atsižvelgiant į daugelį veiksnių, lemiančių betono valkšnumo procesą, tikslesnės šio koeficiento reikšmės gali būti imamos remiantis Lacidogna ir Tarantino (1996), Ghali *et al.* (2002), ACI 209R-92.
5. Kompozito valkšnumo mato reikšmės paprastai užimą tarpinę reikšmę tarp jo atskirai paimtų sluoksnių valkšnumo mato reikšmių.

Literatūra

- ACI 209R-92. 1992. American Concrete Institute Committee 209. Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. ACI, Farmington Hills, Detroit. 300 p.
- ACI 435R-95. 2003. American Concrete Institute Committee 435. Details of the section curvature method for calculating deflections. Appendix B. Control of deflection in concrete structures. ACI, Farmington Hills, Detroit. 250 p.
- Balevičius, R. 2009. An average stress strain approach to creep analysis of RC uncracked elements, *Mechanics of Time-dependent Materials*. doi: [10.1007/s11043-009-9093-x](https://doi.org/10.1007/s11043-009-9093-x) (in press).
- Bazant, Z. P.; Najjar, L. J. 1973. Comparison of approximate linear methods for concrete creep, *Journal of the Structural Division* 99(ST9): 1851–1874.

- Bazant, Z. P. 1972. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method, *ACI Journal* 69: 212–217.
- EN 1992-1-1:2004. 2004. Part 1-1. European Committee for Standardization. Eurocode 2: Design of concrete structures. General rules and rules for buildings. CEN, Brussels. 200 p.
- Ghali, A.; Favre, R.; Elbadry, M. 2002. *Concrete Structures: Stresses and Deformations*. London: Spon Press. 584 p.
- Lacidogna, G.; Tarantino, M. 1996. Approximate expressions for the ageing coefficient and the relaxation function in the viscoelastic analysis of concrete structures, *Materials and Structures* 29: 131–140. doi:10.1007/BF02486158
- Marčiukaitis, G. 1998a. *Statybinių kompozitų kūrimo ir savybių prognozavimo principai* [Principles of creation and prognosis of the properties of building composites]. Vilnius: Technika. 133 p.
- Marčiukaitis, G. 1998b. Sluoksniuotojų statybinių kompozitų valkšnumo parametrų nustatymas [Determination of creep parameters in layers of building composites], *Civil Engineering and Management (Statyba)* 4(2): 101–108.
- Marčiukaitis, G. 2001. Susitraukimo deformacijų įtaka kompleksinių mūro elementų įtempių ir deformacijų būviui [Shrinkage influence on stress-strain state of composite masonry members], *Journal of Civil Engineering and Management [Statyba]* 7(3): 177–183.
- Trost, H. 1967. Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton, *Beton- und Stahlbetonbau* 62(10): 230–238; 62(11): 261–269.
- Zabulionis, D.; Balevičius, R.; Dulinskas, E. 2006. Model for time-dependent stress and strain analysis of layered composite Element, *Solid State Phenomena* 113: 571–576. doi:10.4028/www.scientific.net/SSP.113.571
- Zabulionis, D.; Gailius, A. 2007. Numerical modelling of creep functions of laminated composites, *Mechanika* 65(3): 5–11.
- Александровский, С. В. 1973. *Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести* [Aleksandrovskij, S. V. Analysis of Plain and Reinforced Concrete Structures for Temperature and Moisture Effects with Account of Creep]. Москва: Стройиздат. 432 с.
- Марчюкайтис, Г.; Дулинскас, Е. 1974. *Напряженно-деформированное состояние преднапряженных железобетонных конструкций при теплообработке* [Marčiukaitis, G.; Dulinskas, E. Stress Strain State of Prestressed Concrete Structures under the Heat Curing]. Вильнюс: Мокслас. 122 с.
- Прокопович, И. Е.; Зедгендзе, В. А. 1980. *Прикладная теория ползучести* [Prokopovich, I. E.; Zedgenidze, V. A. Applied Theory of Creep]. Москва: Стройиздат. 240 с.

STRESS, STRAIN AND CREEP ANALYSIS OF THE LAYERED COMPOSITE STRUCTURES UNDER SUSTAINED LOADING

G. Marčiukaitis, R. Balevičius

Summary. The paper proposes numerical and analytical models of the time-dependent analysis of a multilayered composite. These models enable us to predict the time-dependent behaviour of composite structures made of materials having age-variable properties. The proposed numerical model deals with a numerical solution of linear Volterra integral equation implying the validity of the principle of superposition for the layers. Meanwhile, the proposed analytical approach is based on the application of the age-adjusted effective modulus method for the composite. The validity of these models has been proven by a direct calculation of the time-dependent stresses and strains for the three-layered composite wall structure comparing the obtained theoretical values with those determined numerically. In particular, it was demonstrated that the analytical approach gave the identical values of the time-dependent stress strain state parameters. Relying on the results obtained, the concluding remarks have been summarized as follows: a) Despite the fact of sustained load, acting on the composite made of layers with different time-dependent deformational properties does not always hold time-invariant layer stress. In particular, the layers possessing a higher strain tend to produce relaxation while the layers with a lower strain are undergone the stress increase to maintain the equilibrium between internal and external forces (Fig. 4, b, e). Therefore, the failure should primarily be originated from the layer with a lower strain; b) Time variation in the elastic moduli of the layers is responsible for the increased stresses at time t in a higher strain layer due to a partial recovery of instantaneous strains. This effect is more progressive at a young age of the composite loaded (cf. Fig. 4, b and e); c) The ageing coefficient between the layers is different and is mainly subjected by the history of the ageing process of the layers. However, at the age of loading exceeding 28 days, the difference in the ageing coefficient of the layers is insignificant (Fig. 4, a). Moreover, it should be emphasized that the ageing coefficients of the layers are coincident with each other for the case of the time invariant elastic properties of the layers (Fig. 4, d). d) For the most practical purposes requiring long creep periods (exceeding 360 days), an approximate value of the ageing coefficient of the layers equal to 0.8 should be recommended predicting the stress-strain state of the layered composite using the proposed analytical method. More sophisticated functions for the ageing coefficients proposed by Lacidogna and Tarantino (1996), Ghali et al. (2002), ACI 209R-92 may be implemented for the sake of analysis accuracy. e) The values of the creep coefficient for the whole composite are mainly within the values of the creep coefficients of the layers.

Keywords: layered composite structure, time-dependent redistribution of stress, creep and ageing coefficients, creep coefficient for the whole composite

Gediminas MARČIUKAITIS. Professor, Doctor Habil at the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures of Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). PhD (Kaunas Polytechnical Institute, 1963). Research visit to the University of Illinois (1969). Doctor Habil (1980) at Moscow Civil Engineering University, Professor (1982). The author and co-author of 5 monographs, 6 text-books and more than 300 scientific articles. Research interests: mechanics of reinforced concrete, masonry and layered structures, new composite materials, investigation and renovation of buildings.

Robertas BALEVIČIUS. MSc (CE), PhD at the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures of Vilnius Gediminas Technical University, Lithuania. Research interests: mechanics of time-dependent materials, finite and discrete element methods.